

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB) .

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

1). $\vec{AB}(4; 2; -6)$
 $B(3; 2; -1)$

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{AB}(4; 2; -6)$$

on pose $\vec{u}(-2; -1; 3)$

$$\cdot \frac{4}{-2} = -2 \quad \cdot \frac{2}{-1} = -2$$

$$\cdot \frac{-6}{3} = -2$$

donc $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{AB}$
 et donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur
 de (AB) .

Comme $B(3; 2; -1) \in (AB)$,
alors une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Donc l'affirmation est vraie.

- Le plan (OAB) est dirigé par $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

$$\vec{OA}(-1; 0; 5) \text{ et } \vec{OB}(3; 2; -1)$$

$$\begin{aligned} \cdot \vec{n} \cdot \vec{OA} &= 5 \times -1 + -2 \times 0 + 1 \times 5 \\ &= -5 + 0 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \vec{n} \cdot \vec{OB} &= 5 \times 3 + -2 \times 2 + 1 \times -1 \\
 &= 15 - 4 - 1 \\
 &= 10 \neq 0
 \end{aligned}$$

donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAB).

Donc l'affirmation est fausse.

non coplanaire = ni parallèles et
ni sécante.

2) . $\vec{u}(1; -1; 2)$ directeur de (d)

. $\vec{v}(4; 4; -6)$ directeur de (d').

$$\cdot \frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4} \left(\neq \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \right)$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
et donc les droites (d) et (d')
ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 15 + k = 1 + 4\lambda \Rightarrow k = 1 + 4\lambda - 15 \\ 8 - k = 2 + 4\lambda \\ -6 + 2k = 1 - 6\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4\lambda \\ 8 - (-14 + 4\lambda) = 2 + 4\lambda \\ -6 + 2k = 1 - 6\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4\lambda \\ 22 - 4\lambda = 2 + 4\lambda \\ -6 + 2k = 1 - 6\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (\Rightarrow) \quad & \begin{cases} k = -12 + 4s \\ 8s = -20 \Rightarrow s = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2} \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Rightarrow) \quad & \begin{cases} k = -12 + 4 \times \frac{5}{2} = -4 \\ s = \frac{5}{2} \\ \underbrace{-6 + 2 \times -4}_{-14} = \underbrace{1 - 6 \times \frac{5}{2}}_{-14} \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc les droites (d) et (d')
sont sécantes au point d'
intersection $L(-11; 12; -14)$.

Donc les droites sont coplanaires

et donc l'affirmation est fausse.

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n}(1; -1; 1) \\ x - y + z + 1 = 0 \quad (P) \\ C(2; -1; 2). \end{array} \right.$$

• Trouver l'équation paramétrique d'une droite orthogonale à (P) et passant par C .

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n}(1; -1; 1) \text{ directeur de } (d) \\ C(2; -1; 2) \text{ point de } (d) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{array} \right. , \quad \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

• Intersection de la droite et du plan.

$$2+t - (-1-t) + 2+t + 1 = 0$$

$$6 + 3t = 0$$

$$t = \frac{-6}{3} = -2.$$

Donc le projeté orthogonal de C sur le plan (P) est :

$$x = 2 - 2 = 0$$

$$y = -1 - (-2) = 1 \Rightarrow H(0; 1; 0)$$

$$z = 2 - 2 = 0$$

$$CH = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-1))^2 + (0-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Donc l'affirmation est juste.

Exercice 1 5 points

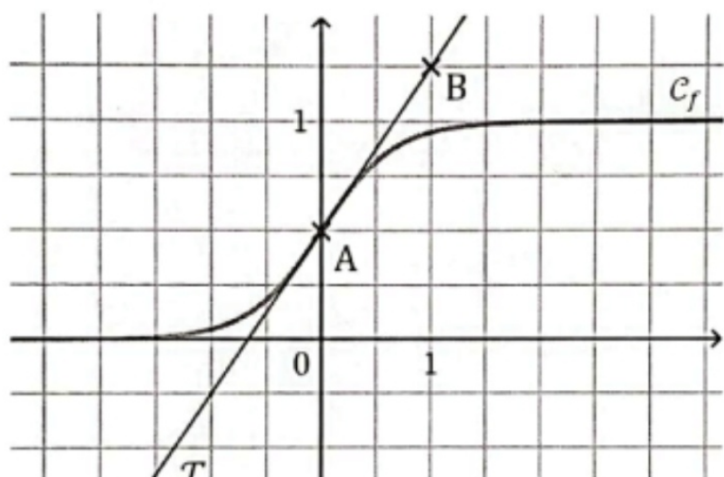
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1; \frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



$$g(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$g'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Partie A : Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .
b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f .

~~4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.~~

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Partie A :

$$1) g(0) = \frac{1}{2}$$

$$g'(0) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{4}$$

donc une équation de $\mathcal{T}$.

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2) La fonction f semble
convexe sur $]-\infty; 0]$ et concave
sur $[0; +\infty[$.

Partie B:

$$1) f'(x) = \frac{-(-3e^{-3x})}{(1+e^{-3x})^2}$$

$$= \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$$

$$2) f'(x) = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} > 0$$

donc f est strictement

croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$ par composition

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-3x} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$ par composition

et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-3x} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Partie C :

1) $\tau: y = f'(0)(x-0) + f(0).$

$$\cdot f'(0) = \frac{3e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$\cdot f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}.$$

donc $\tau: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

2) $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-3x} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow e^{-3x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-3x} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{0}{-3} = 0$$

donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	$\emptyset$	-

3) a) f est convexe sur $]-\infty; 0]$
car f'' est positive sur $]-\infty; 0]$

f est concave sur $[0; +\infty[$
car f'' est négative sur $[0; +\infty[$.

3) A est le point d'inflexion.

4) T est au-dessus de E_f
sur $]-\infty; 0]$ car f est
convexe

T est au-dessus de E_f
sur $[0; +\infty[$ car f est
concave.