

### Exercice 1 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  et la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par

$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$

privé

On note  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes représentatives.

1) Déterminer les dérivées des fonctions  $f$  et  $g$ .

2) a) Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x+3)$ .

b) Utiliser ce résultat pour déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

3) Démontrer que les courbes  $C_f$  et  $C_g$  admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner l'équation de cette tangente.

$$1) f'(x) = 2x + 3 \times 1 = 2x + 3$$

$$g'(x) = -1 \times \left( \frac{-1}{(x+2)^2} \right) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= x+2 \\ u'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$2) a) (x+1)^2(x+3)$$

$$= (x^2 + 2x + 1)(x+3)$$

$$= x \times x^2 + x \times 2x + x \times 1 + 3 \times x^2 + 3 \times 2x + 3 \times 1$$

$$= x^3 + 2x^2 + x + 3x^2 + 6x + 3$$

$$= x^3 + 5x^2 + 7x + 3$$

$$\text{denn } x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x+3)$$

$$\hookrightarrow f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 3x + 1 = \frac{-1}{x+2}$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x+2) = -1$$

$$x^3 + 3x^2 + x + 2x^2 + 6x + 2 = -1$$

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 2 + 1 = 0$$

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$\stackrel{=}{=} (x+1)^2(x+3) = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \quad \underline{\underline{=}} \quad x+3 = 0$$

$$x+1 = 0 \quad x = -3$$

$$x = -1$$

donc les abscisses des points d'intersection sont  $x = -1$  et  $x = -3$ .

$$3) \cdot f'(-1) = 2x(-1) + 3 = 1$$

$$\cdot g'(-1) = \frac{1}{(-1+2)^2} = 1$$

 =

---

$$\bullet f'(-3) = 2 \times (-3) + 3 = -3$$

$$\bullet g'(-3) = \frac{1}{(-3+2)^2} = 1 \quad \text{↗} \neq$$

donc les courbes  $C_f$  et  $C_g$  admettent une tangente commune en  $x = -1$ .

Une équation de la tangente est:

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$y = 1 \times (x + 1) - 1$$

$$y = x$$

### Exercice 2 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ .

1) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Démontrer que les tangentes à la courbe de  $f$  en deux points d'abscisses opposées sont parallèles.

$$1) \quad u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = x^2 + 1 \quad v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2) \quad \boxed{f'(-x)}$$

$$= \frac{-2x(-x)^2 + 2}{((-x)^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$= \boxed{f'(x)}$$

donc les tangentes en deux points d'abscisses opposées sont parallèles.

### Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ , on note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Déterminer l'équation de la tangente  $T_0$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 0.

3) a) Factoriser l'expression  $d(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4 - (x - 4)$  et étudier le signe de  $d(x)$ .

b) En déduire la position relative de  $C_f$  par rapport à  $T_0$ . Justifier.

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(x) &= 3x^2 - 2 \times 2x + 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$2) \quad T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\alpha \quad f'(0) = 1$$

$$f(0) = -4$$

$$\text{donc} \quad y = 1 \times x + (-4)$$

$$y = x - 4.$$

$$3) d(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4 - (x-4)$$

$$a) = x^3 - 2x^2 + \cancel{x} - \cancel{4} - \cancel{x} + \cancel{4}$$

$$= x^3 - 2x^2$$

$$= x^2 \times x - 2 \times x^2$$

$$= x^2(x-2)$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

| $x$    | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x^2$  | +         | :   | +         |
| $x-2$  | -         | 0   | +         |
| $d(x)$ | -         | 0   | +         |



3) Comme  $d$  est négative sur  $]-\infty; 2]$  alors  $E_f$  est en dessous de la tangente  $T_0$  sur  $]-\infty; 2]$ .  
et comme  $d$  est positive sur  $[2; +\infty[$ , alors  $E_f$  est au dessus de la tangente  $T_0$  sur  $[2; +\infty[$ .