

Exercice 4 On considère les points $A(1 ; 2 ; 4)$, $B(0 ; 0 ; 2)$ et $C(-3 ; -2 ; -1)$.

1. Justifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 3y - 4z + 8 = 0$.

2. Déterminer les coordonnées de deux points de (ABC) différents de A , B et C .

$$1) 2x + 3y - 4z + 8 = 0$$

$$2) D(-4 ; 0 ; 0)$$

$$2x - 4 + 3 \times 0 - 4 \times 0 + 8 = 0$$

$$E(-1 ; -2 ; 0)$$

$$2x - 1 + 3x - 2 - 4 \times 0 + 8 = -2 - 6 + 8 = 0$$

Exercice 5 On considère les points $A(5 ; 3 ; 8)$, $B(7 ; 2 ; 7)$ et $C(-2 ; 7 ; 14)$.

1. Justifier que ces trois points définissent un plan (ABC) .

2. Montrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) .

3. En déduire une équation de (ABC) .

1) $\vec{AB}(2; -1; -1)$
 $\vec{AC}(-7; 4; 6)$

$$\cdot \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} \neq -\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{6}$$

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

Donc les points A, B, C définissent un plan (ABC) .

$$2) \vec{AB}(2; -1; -1)$$

$$\vec{AC}(-7; 4; 6)$$

$$\vec{n}(2; 5; -1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{n} \cdot \vec{AB} &= 2 \times 2 + (-1) \times 5 + (-1) \times (-1) \\ &= 4 - 5 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 2 \times (-7) + 5 \times 4 + 6 \times (-1) \\ &= -14 + 20 - 6 = 0 \end{aligned}$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal aux
vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, et donc
 $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC)

$$3) \quad 2x + 5y - z - 17 = 0$$

Exercice 6 On considère les points $E(0 ; 3 ; 0)$, $F(2 ; 6 ; 1)$ et $G(10 ; 8 ; 0)$.
On admet que ces trois points définissent un plan (EFG) .

1. Montrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à (EFG) .

2. En déduire une équation de (EFG) .

1) $\vec{EF}(2; 3; 1)$
 $\vec{EG}(10; 5; 0)$

$$\vec{n} \cdot \vec{EF} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{EG} = 0$$

donc $\vec{n}$ est normal à (EFG)

$$2) \quad x - 2y + 4z + 6 = 0$$

Dans toute la feuille, les coordonnées sont données dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 1

1. Déterminer un vecteur normal à chacun des plans $\mathcal{P}$ d'équation $5x + 3y - 7z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}'$ d'équation $8x - 11y - z = -7$.
2. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils sécants ou parallèles?
3. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils perpendiculaires?

1). $\vec{n}(5; 3; -7)$ normal à $(\mathcal{P})$
• $\vec{n}'(8; -11; -1)$ normal à $(\mathcal{P}')$.

2). $\frac{5}{8} \neq \frac{3}{-11} \neq \frac{-7}{-1}$

donc les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et donc les plans ne sont pas parallèles.

Donc les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

$$\begin{aligned} 3) \quad \vec{n} \cdot \vec{n}' &= 5 \times 8 + 3 \times (-11) + 4 \times (-1) \\ &= 40 - 33 - 4 \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux, et donc les plans (P) et (P') ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 2 Étudier les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives $3x + y - 5z + 8 = 0$ et $-6x - 2y = 15 - 10z$.

• $\vec{n}_1(3; 1; -5)$ normal à $(\mathcal{P}_1)$

• $\vec{n}_2(-6; -2; 10)$ normal à $(\mathcal{P}_2)$

• $\frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

• $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

• $\frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$.

donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$
sont colinéaires car $\vec{n}_1 = -\frac{1}{2} \vec{n}_2$.

Donc les plans $(\mathcal{P}_1)$ et
 $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles.

Exercice 3 On donne ci-dessous une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ et une représentation paramétrique d'une droite d .

Étudier les positions relatives de d et $\mathcal{P}$.

1. $x + y - 2z + 10 = 0$ et $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. $x + y - 2z - 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. $x - y + z + 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

4. $x - 3y + z - 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1) $\vec{n}(1; 1; -2)$

$\vec{u}(1; 1; -1)$

$$\begin{aligned} * \quad \vec{u} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + 1 \times 1 + -2 \times -1 \\ &= 4 \neq 0 \end{aligned}$$

donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux, et donc la droite n'est pas parallèle

au plan.

Donc la droite (d) est
sécante au plan (P).

$$* \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-1}$$

donc les vecteurs ne sont pas
colinéaires et la droite n'est pas
perpendiculaire au plan.

Donc la droite (d) est
sécante au plan (P).

$$2) \vec{n} (1; 1; -2)$$

$$\vec{u} (1; 1; 1)$$

$$\begin{aligned} * \vec{n} \cdot \vec{u} &= 1 \times 1 + 1 \times 1 + -2 \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux
et la droite (d) est parallèle
au plan (P) .