

Séries

- $\sum u_n$ converge si $(S_n)_n$ est convergente.

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \sum u_n$$

- $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow (R_n)$ converge vers 0.

- $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)_n$ converge 0.



Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ DVG.

• $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV
↳ alors $\sum (\lambda u_n + v_n)$ CV
vers $\lambda \sum u_n + \sum v_n$.

• $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

• $\sum u_n$ CVA $\Rightarrow \sum u_n$ CV



Tous les critères suivants
sont valables pour des séries
à termes positifs

- $(S_n)_n$ est majorée $\Leftrightarrow \sum u_n$ CV.
- $0 \leq u_n \leq v_n$ / $u_n = O(v_n)$
 - $\rightarrow \sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV
 - $\rightarrow \sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum v_n$ DV

- $u_n = o_{+\infty}(v_n)$

$$\rightarrow \sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$$

$$\rightarrow \sum u_n \text{ DV} \Rightarrow \sum v_n \text{ DV}$$

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

$$\sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum v_n \text{ CV}$$

- f positive décroissante sur $[a; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$

Alors $\sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f dt \text{ CV}$

✓ géométrique

$$\rightarrow \sum q^n \text{ CV } \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\text{et } \sum q^n = \frac{1}{1-q}$$

✓ Riemann

$$\rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\rightarrow \sum n q^{n-1} \text{ CV } \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\text{et } \sum q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

✓ expo

$$\rightarrow \sum \frac{x^n}{n!} \text{ CV } \underline{\text{Toujours}}$$

$$\text{et } \sum \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

exercice 1:

a) $\sum \frac{1}{n^2 - n}$

• $\frac{1}{n^2 - n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

or $\frac{1}{n^2 - n} \sim \frac{1}{n^2} > 0$

$$\frac{\frac{1}{n^2 - n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 - n} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1 - \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ ou par Riemann
car $2 > 1$

clonc par Comparison theorem

$$\sum \frac{1}{n^2 - n} \quad \text{CV}$$

b) $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$

$$\frac{1}{e^n + e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car } e^n + e^{-n} \sim e^n$$

et $\frac{1}{e^n + e^{-n}} \sim \frac{1}{e^n} \rightarrow 1$

$\frac{e^n}{e^n + e^{-n}} = \frac{1}{1 + e^{-2n}} \rightarrow 1$

$$\text{car } \sum \frac{1}{e^n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\alpha C < \frac{1}{e} < 1$$

$$\text{donc } \sum \frac{1}{e^n} < C$$

et par comparaison, la

$$\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}.$$

g) $\sum \frac{1}{n^3 + 2^n}$

$$\frac{1}{n^3 + 2^n} \sim_{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)$$

$$\frac{\frac{1}{n^3 + 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{n^3 + 2^n} = \frac{1}{1 + \frac{n^3}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\frac{n^3}{2^n} = \frac{n^3}{e^{n \ln(2)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\alpha \sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\alpha 0 < \frac{1}{2} < 1, \text{ donc } \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

CV et par comparaison

$$\sum \frac{1}{n^2 + 2^n} \text{ CV.}$$

$$d) \sum P_n \left(\frac{n^2 + n^4}{2n^4} \right)$$

$$P_n \left(\frac{n^2 + n^4}{2n^4} \right) = P_n \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right)$$

$$= P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_n\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

donc $\sum P_n \frac{n^2 + n^3}{2n^4} \text{ DV.}$

e) $\sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$

or $\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

et $\sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} \sim \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}.$

or $\sum \frac{1}{n} \text{ DV} \text{ donc par}$

Comparison $\leq \sqrt{\frac{n+2}{n^3-5n+1}}$ DV

$$\textcircled{2} \leq \frac{P_n(n)}{3^n}.$$

$$\frac{P_n(n)}{3^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{\frac{P_n(n)}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} &= \frac{2^n}{3^n} \times \ln(n) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \ln(n) \\ &= e^{n \ln(2/3)} \times \ln(n) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{or } < \frac{1}{2^n} \text{ CV} \quad \text{car } u < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{et par comparaison } \sum \frac{n \ln n}{3^n} \text{ CV}$$