

Devoir - Saison

Exercice 1:

Partie C:

1) Γ a pour coordonnées $(x; \varphi(x))$.

$$OM = \sqrt{(x-0)^2 + (\varphi(x)-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + \varphi(x)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$$

2) a) $h'(x) = 2x + 4 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$

$$= 2x + \frac{8 \ln(x)}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + 8 \ln(x)}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 + 4 \ln(x))}{x}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{x}}_{>0} \times f(x).$$

x	0		∞
h'		-	+
h		$+\infty$	$+\infty$

$> h(x)$

b) Le tableau de variations montre que la fonction h admet un unique minimum au point d'abscisse a .

or $Orl = \sqrt{h(x)}$ a les mêmes variations que la fonction h , donc Orl admet un minimum en a .

Ainsi il existe un unique point $A(a; 2h(a))$ de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ) , distinct de A , on ait $Orl > OA$.

3) La droite (OA) a pour vecteur directeur $\vec{OA}(a; 2h(a))$

. La tangente T_A admet pour

coefficient directeur $\varphi'(x) = \frac{2}{x}$

Donc T_A a pour vecteur directeur $\vec{u} \left(1; \frac{2}{x} \right)$

$$\bullet \vec{OA} \cdot \vec{u} = x \times 1 + 2 \ln(x) \times \frac{2}{x}$$

$$= x + \frac{4 \ln(x)}{x}$$

$$= \frac{x^2 + 4 \ln(x)}{x}$$

x est l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$,
donc $x^2 + 4 \ln(x) = 0$.

$$\text{donc } \vec{OA} \cdot \vec{u} = 0.$$

Donc la droite (OA) est

perpendiculaire à la tangente
 T_A à la courbe (Γ) au point A .

exercice 2:

1) $\frac{2}{3} * B + \frac{1}{2} * C + \frac{2}{3} * D$

2) On peut conjecturer que
à long terme le tapis a
plus de chance d'être dans la
galerie B.

1) a) $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1}$

$$= \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n - \frac{1}{4} b_n - \frac{1}{3} c_n$$
$$= \frac{1}{3} a_n - \frac{1}{3} c_n$$
$$= \frac{1}{3} (a_n - c_n)$$
$$= \frac{1}{3} u_n.$$

donc (u_n) est géométrique de
raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme
 $u_0 = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1$.

$$3) \quad u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2) a) Les trois événements
associés aux probabilités a_n , b_n
et c_n forment une partition de
l'univers.

$$\text{Donc} \quad a_n + b_n + c_n = 1.$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{2}{7} \\ &= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{2}{3} c_n - \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$= \frac{2}{3} \left(\underbrace{a_n + b_n + c_n}_{= 1} \right) - \frac{1}{6} b_n - \frac{4}{7}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} b_n - \frac{4}{7}$$

$$= -\frac{1}{6} b_n + \frac{2}{21}$$

$$= -\frac{1}{6} \left(b_n - \frac{4}{7} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} v_n$$

b) $v_n = v_0 \times q^n$

$$= -\frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$