

Tribus

exercice 2:

- $\mathcal{A}_f = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}.$

$\rightarrow \emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ et $\emptyset \in \mathcal{B}$
car $\mathcal{B}$ est une tribu sur F .

$\rightarrow$ Soit $A \in \mathcal{A}_f$.

il existe $B \in \mathcal{B}$, $A = f^{-1}(B)$.

$$A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$$

et $B^c \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ une tribu sur F .

→ Soit $(A_n)_n$ une suite d'élément de $\mathcal{A}_f$.

$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = f^{-1}(B_n)$ avec $B_n \in \mathcal{B}$.

$$\text{D'où } \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(B_n)$$

$$= f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right)$$

et $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est une tribu sur F .

Donc $\mathcal{A}_f$ est une tribu sur E .

- $\mathcal{B}_\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}^{-1}(A) : A \in \mathcal{A} \}.$

$\rightarrow \emptyset = \mathcal{F}^{-1}(\emptyset)$ et $\emptyset \in \mathcal{C}_\mathcal{F}$ car $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ est une tribu sur E .

$\rightarrow$ Soit $(B_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_\mathcal{F}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \mathcal{F}^{-1}(A_n)$ avec $A_n \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \bigcup_{n \geq 1} B_n &= \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}^{-1}(A_n) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \end{aligned}$$

et $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une tribu sur E .

→ Soit $B \in \mathcal{B}$.

Alors $B = f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{A}$.

$$B^c = F \setminus f^{-1}(A).$$

$$= f^{-1}(E \setminus A)$$

$$= f^{-1}(A^c)$$

et $A^c \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une tribu sur E .

Mots clés

- Tribu → déf
- mesure → déf.
- espace mesurable $(E, \mathcal{F})$
- espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$
- parties mesurables → déf
- mesure de probabilité
- espace de probabilité
- application mesurable
- presque-sûr.

Feuille de TD 1

exercice 11 :

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements.

P est une mesure de probabilité

$$\rightarrow P(\Omega) = 1$$

$$\rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\hookrightarrow A_i$ soit deux disjoints

$$\text{on a : } \bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c$$

$$\text{donc } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)$$

or par l'inégalité de Boole
on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i))$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

$$\geq 1 - n + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$