

Toutes les coordonnées sont données dans un repère de l'espace.

Exercice 1 Donner une représentation paramétrique de :

1. La droite d passant par $A(7 ; -1 ; 3)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. La droite d' passant par $B(0 ; 2 ; -5)$ et dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. La droite (AB) .

Exercice 2 Donner deux points et un vecteur directeur de chacune des droites dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous :

1. d_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + 8t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. d_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5k \\ y = 1 - 8k \\ z = 2k - 6 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. d_3 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 \\ y = -s \\ z = -6 + s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 On reprend la droite d_1 de l'exercice 2.

Les points suivants appartiennent-ils à d_1 ?

1. $A(25 ; 45 ; 46)$

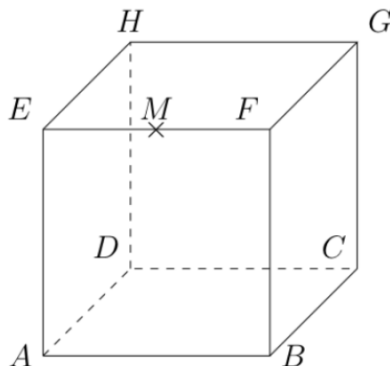
2. $B(13 ; -27 ; -17)$

3. $C(0 ; -5 ; 2)$

Exercice 4 On considère la droite d_4 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 9 - 8k \\ y = 13 - 16k \\ z = 18 - 14k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Montrer que cette droite d_4 est la droite d_1 de l'exercice 2.

Exercice 5 On se place dans le cube ci-dessous :



Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MC) dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Exercice 6 On considère deux points $E(1 ; -3 ; 8)$ et $F(-9 ; 0 ; 4)$.
Déterminer une représentation paramétrique :

1. du segment $[EF]$;

2. de la demi-droite $[EF)$.

exercice 1:

$$1) \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

exercice 2:

$$1) \vec{u}(4; 8; 7)$$

$$A(1; -3; 4)$$

$$B(5; 5; 11)$$

exercice 3:

$$1) \quad 25 = 1 + 4t \Rightarrow t = 6$$

$$45 = -3 + 8t \Rightarrow t = 6$$

$$46 = 4 + 7t \Rightarrow t = 6$$

donc $A \in (d_1)$

exercice 4:

$$\cdot \vec{r} \left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1 \right)$$

$$\cdot C \left(1 ; 1 ; 0 \right)$$

$$\vec{r} \left(\frac{1}{2} ; 1 ; -1 \right)$$

$$(MC) : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \\ y = 1 + \epsilon \\ z = -\epsilon \end{cases}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

Exercice 1 Toutes les coordonnées et positions relatives sont données dans un repère ortho-normé de l'espace.

Déterminer les positions relatives des droites.

1. d_1 et d_2 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 3k \\ y = 4 - k \\ z = 5k + 1 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$



2. d_3 et d_4 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 2t \\ z = -5 + 1,5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 8 - 4k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$



3. d_5 et d_6 de représentations paramétriques respectives :

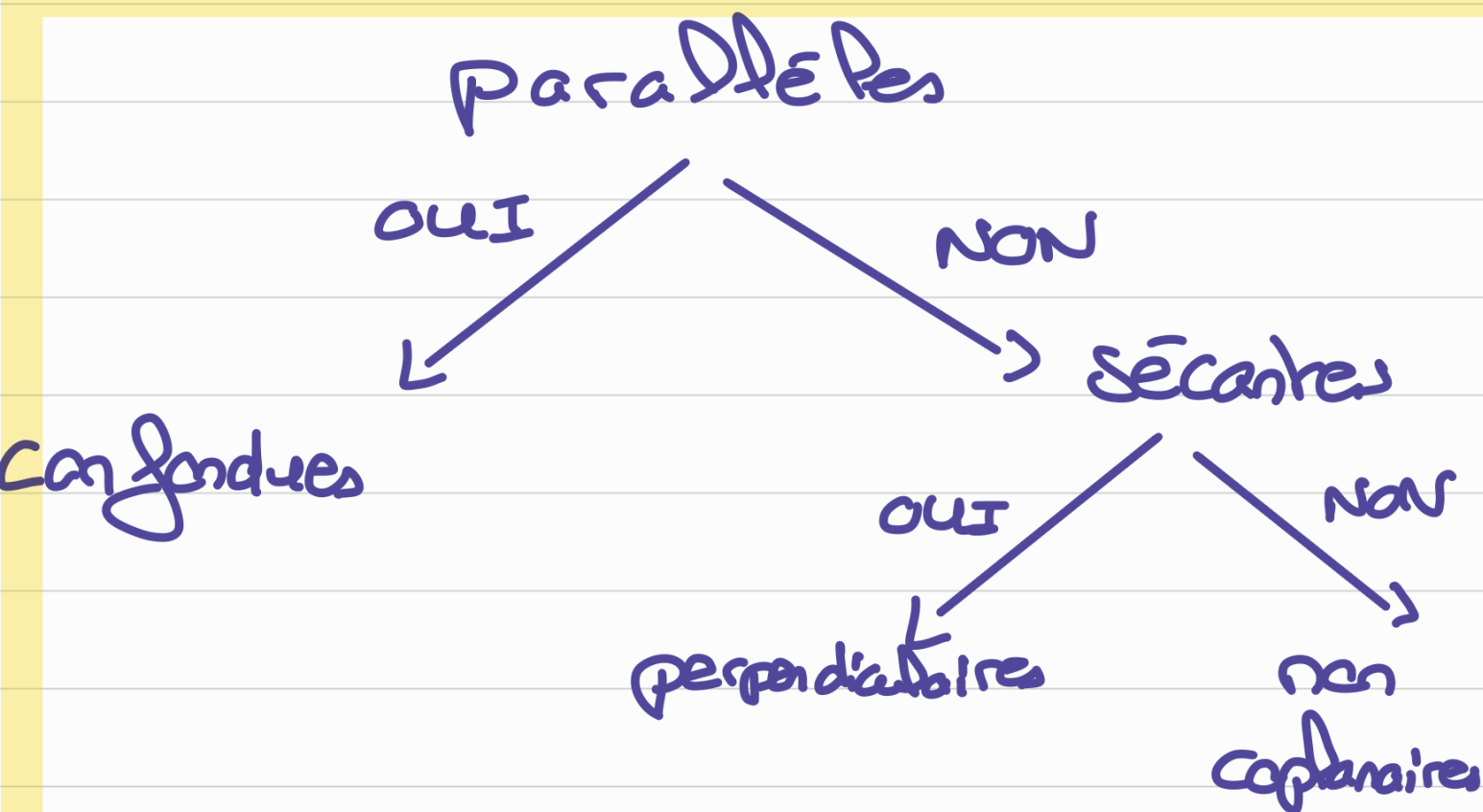
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = -2k \\ z = -4 - k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

4. d_7 et d_8 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 2t \\ z = 6 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = k \\ z = 5 - k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

5. d_9 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7 - 8t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ et (AB) avec $A(15 ; 0 ; 8)$ et $B(-17 ; 4 ; -4)$.

6. (CD) et (EF) avec $C(1 ; 0 ; 0)$, $D(1 ; 2 ; 0)$, $E(5 ; 4 ; 0)$ et $F(3 ; 4 ; -1)$.



$$1) \vec{u}(2; -1; 3)$$

$$\vec{v}(3; -1; 5)$$

$$\cdot \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-1} = 1 \neq \frac{3}{5}$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
et (d_1) et (d_2) non parallèles.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3k \\ 5 - t = 4 - k \\ 4 + 3t = 5k + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &= -1 - k \\ &\Rightarrow -t = 4 - k - 5 \\ &\boxed{t = 1 + k} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3k \\ -t = 4 - k - 5 \\ 4 + 3t = 5k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3k \\ t = 1 + k \\ 4 + 3t = 5k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2(1+k) = 3k \\ E = 1+k \\ 4 + 3E = 5k + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2k = 3k \\ E = 1+k \\ 4 + 3E = 5k + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ E = 4 \\ 4 + 3 \times 4 = 5 \times 3 + 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

16
16

donc le système a une solution et les droites sont sécantes au point

$$L(3; 1; 16)$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 3 + (-1) \times (-1) + 3 \times 5 \\
 &= 6 + 1 + 15 \\
 &= 22 \neq 0
 \end{aligned}$$

donc pas ortho. et les
droites non perpendiculaires.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{u} &(-1; 2; 1,5) \\
 \vec{v} &(2; -4; -3)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = \frac{1,5}{-3} = -\frac{1}{2}$$

donc parallèles.

$$A(0; 3; -5) \in (d_3)$$

$$0 = 1 + 2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$3 = 8 - 4k \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

$$-5 = 4 - 3k \Rightarrow k = 3$$

donc pas confondues.

Équation cartésienne de plan

Dans toute la feuille, les coordonnées et équations sont données dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé de l'espace.

Exercice 1 Donner un vecteur normal à chacun des plans dont l'équation est donnée ci-dessous :

1. $2x + 3y - 5z + 7 = 0$ 2. $x - 8y + 3z = 5$ 3. $2x + y = 9$ 4. $5x - y + 2 = 8z$

Exercice 2 Donner une équation cartésienne :

1. du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(5; -1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
2. du plan $\mathcal{P}'$ passant par $B(2; 0; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à $[AB]$ et passant par le milieu de $[AB]$.

Déterminer une équation de $\mathcal{P}_1$, le plan médiateur de $[MN]$ avec $M(1; -3; 7)$ et $N(-3; 5; 9)$.

Remarque : Tous les points de ce plan médiateur sont à égale distance de M et de N : vous pouvez prendre un point quelconque de ce plan et le constater.

Exercice 4 On considère les points $A(1; 2; 4)$, $B(0; 0; 2)$ et $C(-3; -2; -1)$.

1. Justifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 3y - 4z + 8 = 0$.
2. Déterminer les coordonnées de deux points de (ABC) différents de A , B et C .

Exercice 5 On considère les points $A(5; 3; 8)$, $B(7; 2; 7)$ et $C(-2; 7; 14)$.

1. Justifier que ces trois points définissent un plan (ABC) .

2. Montrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) .

3. En déduire une équation de (ABC) .

Exercice 6 On considère les points $E(0; 3; 0)$, $F(2; 6; 1)$ et $G(10; 8; 0)$.

On admet que ces trois points définissent un plan (EFG) .

1. Montrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à (EFG) .

2. En déduire une équation de (EFG) .

Exercice 7 Déterminer une équation du plan (RST) avec $R(7; -4; 1)$, $S(7; 1; 4)$ et $T(4; 5; 7)$.

exercice 2:

$$\begin{cases} 1) A(5; -1; 2) \\ \vec{n}(3; 6; 8) \end{cases}$$

$$. \quad 3x + 6y + 8z + d = 0$$

$$\alpha \quad A(5; -1; 2) \in (\mathcal{P}).$$

$$\text{donc} \quad 3 \times 5 + 6 \times (-1) + 8 \times 2 + d = 0$$

$$25 + d = 0$$

$$d = -25$$

$$\text{Donc} \quad 3x + 6y + 8z - 25 = 0$$

Positions relatives

Dans toute la feuille, les coordonnées sont données dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 1

1. Déterminer un vecteur normal à chacun des plans $\mathcal{P}$ d'équation $5x + 3y - 7z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}'$ d'équation $8x - 11y - z = -7$.
2. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils sécants ou parallèles? ✓
3. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils perpendiculaires?

Exercice 2 Étudier les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives $3x + y - 5z + 8 = 0$ et $-6x - 2y = 15 - 10z$.

Exercice 3 On donne ci-dessous une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ et une représentation paramétrique d'une droite d .

Étudier les positions relatives de d et $\mathcal{P}$.

1. $x + y - 2z + 10 = 0$ et $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$. ✓
2. $x + y - 2z - 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. $x - y + z + 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
4. $x - 3y + z - 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Montrer que la droite d d'intersection des plans $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y - 11 = 0$ et $\mathcal{P}'$ d'équation $x + y + z = 3$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Déterminer si elle existe une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives :

1. $x + y + 2z - 3 = 0$ et $x - 4y + 5z - 6 = 0$
2. $6x - 3y - 2z = 5$ et $-3x + 4y + z - 7 = 0$.

Exercice 6 On considère

- les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$.
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + my - 2z + 8 = 0$ où m est un nombre réel.

Quelle est la valeur du réel m pour laquelle la droite (AB) est parallèle au plan $\mathcal{P}$?

a. $m = -1$

b. $m = 1$

c. $m = 5$

d. $m = -2$

parallèles

OUI

NON

confondues

sécantes

perpendiculaire.

exercice 1:

1) $\vec{n}_1 (5; 3; -7)$

$\vec{n}_2 (8; -11; -1)$

2) $\frac{5}{8} \neq \frac{3}{-11} \neq \frac{-7}{-1} = 7$

donc les vecteurs normaux
ne sont pas colinéaires et

donc les plans ne sont pas parallèles.

Donc les plans sont sécants.

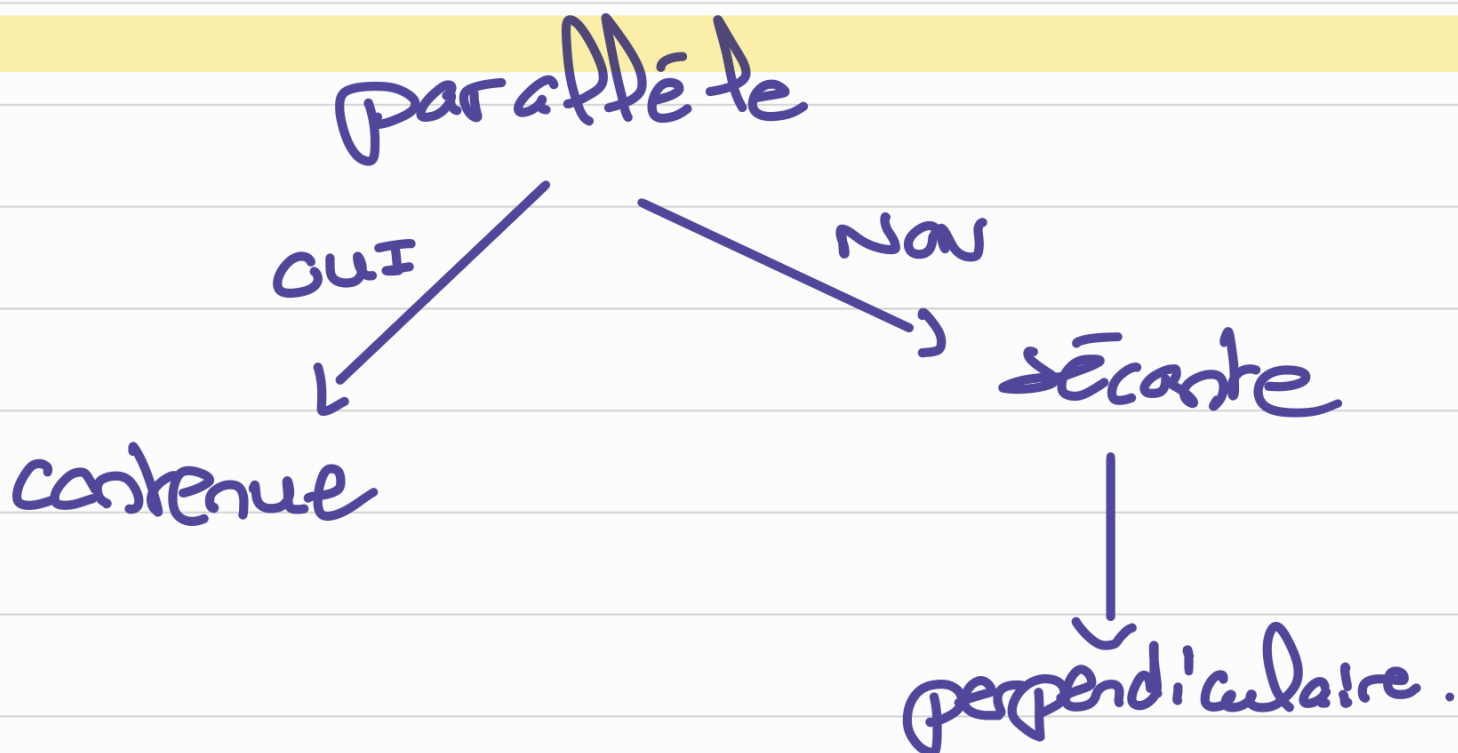
$$3) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 \times 8 + 3 \times (-1) + (-7) \times (-1)$$

$$= 40 - 3 + 7$$

$$= 44 \neq 0.$$

donc les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux et donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

exercice 3:



1) $x + y - 2z + 10 = 0$

$$\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{cases}, \quad \underline{\underline{k \in \mathbb{R}}}$$

* $\vec{n}(1; 1; -2)$

* $\vec{u}(1; 1; -1).$

- $$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-2) \times 1$$

$$= 1 + 1 - 2$$

$$= 0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ droite pas parallèle.

Donc la droite est sécante au plan.

- $$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-1}$$

$\Rightarrow$ droite pas perpendiculaire.

• point d'intersection.

$$5+k + 1+k - 2(4-k) + 10 = 0$$

$$8 + 3k = 0$$

$$k = -\frac{8}{3}.$$

donc $L\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{20}{3}\right).$