Logarithme

exercice 18 :

$f(x) = x - \ln(x)$, $x > 0$

1) $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

$\boxed{\ln(u)' = \frac{u'}{u}}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$= \frac{x - 1}{x}$

2) $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$? $x > 0$

$x - 1 = 0 \iff x = 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) $$f''(x) = \frac{x - (x-1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} > 0$$

donc f convexe.

exercice 24 :

1) a) $B(x) = x + 4e^{-x} - 5.$

$$B'(x) = 1 + 4 \times -e^{-x}$$

$$= 1 - 4e^{-x}$$

b) $B'(x) \geq 0$

$$1 - 4e^{-x} \geq 0$$

$$-4e^{-x} \geq -1$$

$$e^{-x} \leq \frac{1}{4}$$

$$-x \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x \geq -\ln\left(\frac{1}{4}\right) \geq \ln(4).$$

c) $\bullet\ D(0) = 0 + 4e^{-0} - 5$

$= 4 \times 1 - 5$

$= -1$

$\bullet\ B(10) = 10 + 4e^{-10} - 5$

$= 5 + 4e^{-10}$

$\bullet\ D(\ln(4)) = \ln(4) + 4e^{-\ln(4)} - 5$

$= \ln(4) + 4\cancel{e}^{\cancel{\ln}(\frac{1}{4})} - 5$

$= \ln(4) + \cancel{4} \times \frac{1}{\cancel{4}} - 5$

$= \ln(4) - 4$

d)

x	0		$\ln(4)$		10
B'		$-$	0	$+$	
B	-1	$\searrow$	$\ln(4)-4$	$\nearrow$	$5+4e^{-10}$

exercice 10 :

2) a) $f''(x) = e^x - 2$

- $e^x - 2 > 0$

$e^x > 2$

$x > \ln(2)$.

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	↘	$2-2\ln(2)$	↗	$+\infty$

$\simeq 0{,}6$

$$f'(x) = e^{x} - 2x$$

$$f'(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\ln(2)$$

$$= 2 - 2\ln(2)$$

$$\cdot\ \underbrace{e^x}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\frac{2x}{e^x}\right)}_{1}$$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=0$ par croissances comparées

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

Donc f' est positive sur $\mathbb{R}$

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	