

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

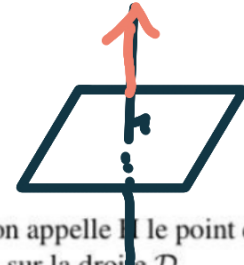
On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
 - Montrer que le point B $(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
 - Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
- On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

 - Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
 - En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.
 - Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
- Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

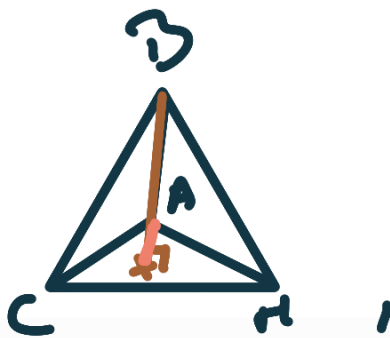
On rappelle que le point B $(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

 - Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
 - Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
 - Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

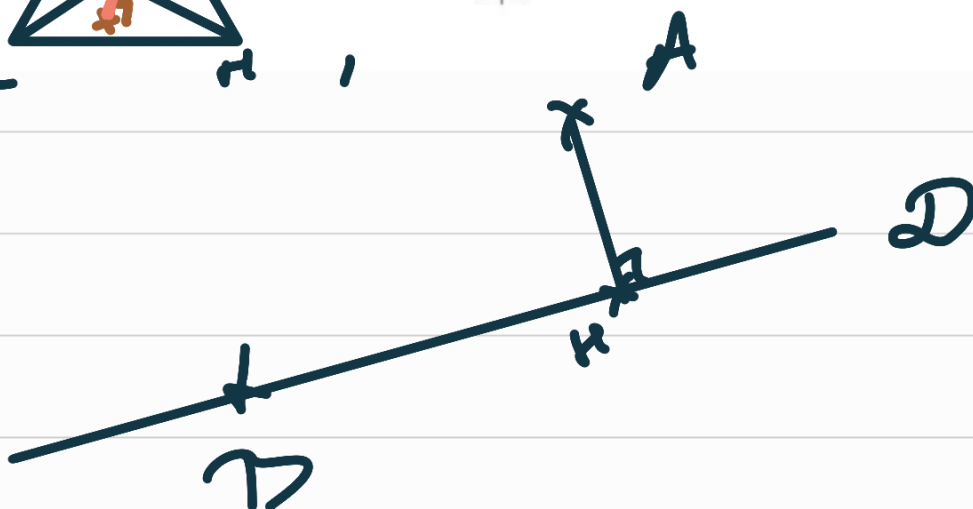


- On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



3/3



1) $\hookrightarrow -1 = 1 + 2\epsilon \Rightarrow \epsilon = -1$

$$3 = 2 - \epsilon \Rightarrow \epsilon = -1$$

$$0 = 2 + 2\epsilon \Rightarrow \epsilon = -1$$

donc $B(-1; 3; 0) \in \mathcal{D}$.

2) $\hookrightarrow$ Comme H est la
projeté orthogonal du point A
sur la droite $\mathcal{D}$, alors $H \in \mathcal{D}$.

or B est un point de $\mathcal{D}$.

Donc $\vec{HB}$ est un vecteur
directeur de $\mathcal{D}$.

D'après le vecteur $\vec{HB}$ et

$\vec{u}$ sont colinéaires.

Donc il existe un réel k tel que $\vec{H\vec{B}} = k\vec{u}$.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \vec{AB} \cdot \vec{u} \\ &= \vec{H\vec{B}} \cdot \vec{u} \quad \swarrow \text{H projeté ortho de A} \\ &= k\vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= k(\vec{u} \cdot \vec{u}) \\ &= k\|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } k = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

1. d_1 et d_2 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 3k \\ y = 4 - k \\ z = 5k + 1 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3k \\ 5 - t = 4 - k \\ 4 + 3t = 5k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ t = 4 \\ 4 + 3 \times 4 = 5 \times 3 + 1 \end{cases}$$

exercice :

$$-x + 2y + z - 5 = 0 \quad (P_1)$$

$$2x - y + 3z - 1 = 0. \quad (P_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ -t + 2y + z - 5 = 0 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 2y + 5 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 2y + 5 \\ 2t - y + 3(t - 2y + 5) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 2y + 5 \\ 5t - 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 2y + 5 \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 2(2 + \frac{5}{7}t) + 5, \\ y = 2 - \frac{5}{7}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - \frac{5}{7}t \\ z = 1 - \frac{3}{7}t \end{cases}, \quad \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$