

Dérivation

exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}$$

1) Détermine la dérivée.

$$f'(x) = \frac{(-2x + 2)x - (-x^2 + 2x - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

2) Etudie le signe de f'

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2 > 0} ?$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times -1 \times 1 \\ = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{4}}{2 \times -1} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{4}}{2 \times -1} = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

3) En déduire le tableau de variations

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$	$\searrow$

exercice :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$
par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

Diagram illustrating the behavior of the function f based on the sign of the derivative f' :

- For $x < -\sqrt{3}$, f' is negative, so f is decreasing. An arrow points from the $-\infty$ column to a minimum value $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- For $x > \sqrt{3}$, f' is negative, so f is decreasing. An arrow points from the $+\infty$ column to a minimum value $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- For $x > -\sqrt{3}$ and $x < \sqrt{3}$, f' is positive, so f is increasing. An arrow points from the $-\sqrt{3}$ column to a maximum value $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- For $x < \sqrt{3}$ and $x > \sqrt{3}$, f' is positive, so f is increasing. An arrow points from the $\sqrt{3}$ column to a maximum value $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

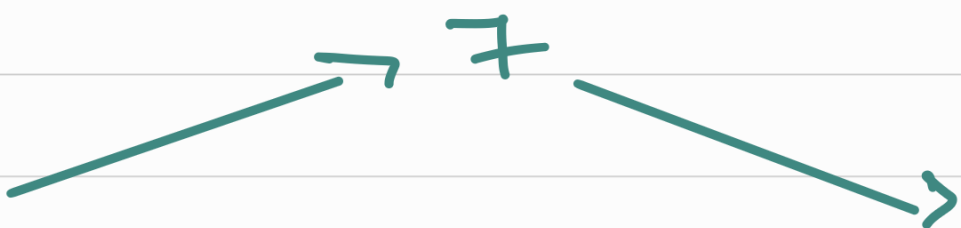
exercice :

• Soit f la fonction définie par :

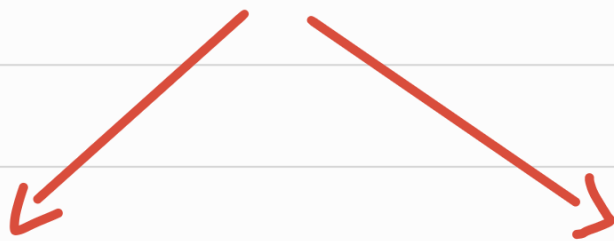
$$f(x) = -3x^2 + 12x - 5.$$

$$f'(x) = -6x + 12$$

$$\bullet -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$+$	ϕ	$-$
f			

$$ax + b$$



$$a < 0$$



x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
signe	+	ϕ	-

$$a > 0$$



x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
signe	-	ϕ	+

exercice :

Un artisan fabrique des meubles et réalise une étude sur une production comprise entre 0 et 60 meubles.

Le coût de production, en euros, de x meubles :

$$C(x) = x^2 + 50x + 300, \quad x \in [0; 60]$$

1) Calculer $C(0)$, et en déduire les frais fixes de l'artisan.

$$\hookrightarrow C(0) = 300.$$

Donc l'artisan a 300 euros de frais fixe.

2) Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x meubles.

Exprimer f en fonction de x .

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 50x + 500}{x}$$

3) Déterminer la dérivée de la fonction f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 50)x - (x^2 + 50x + 500)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 500}{x^2} \end{aligned}$$

4) Dresse le tableau de variations.

$$\Delta = 3600 > 0$$

$$x_1 = -30$$

$$x_2 = 30$$

x	0	30	60
f'		—	ϕ +
f			125

Diagram showing a path from the origin (0,0) to the point (30, 110) and then to the point (60, 125). The path is indicated by arrows: one from the origin to (30, 110) and another from (30, 110) to (60, 125).

5) Pour combien de meuble
le coût unitaire moyen est
le plus optimal?

Le coût unitaire moyen
est le plus optimisé pour
30 meubles, et vaut 140 €.