

Exercice 2 (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

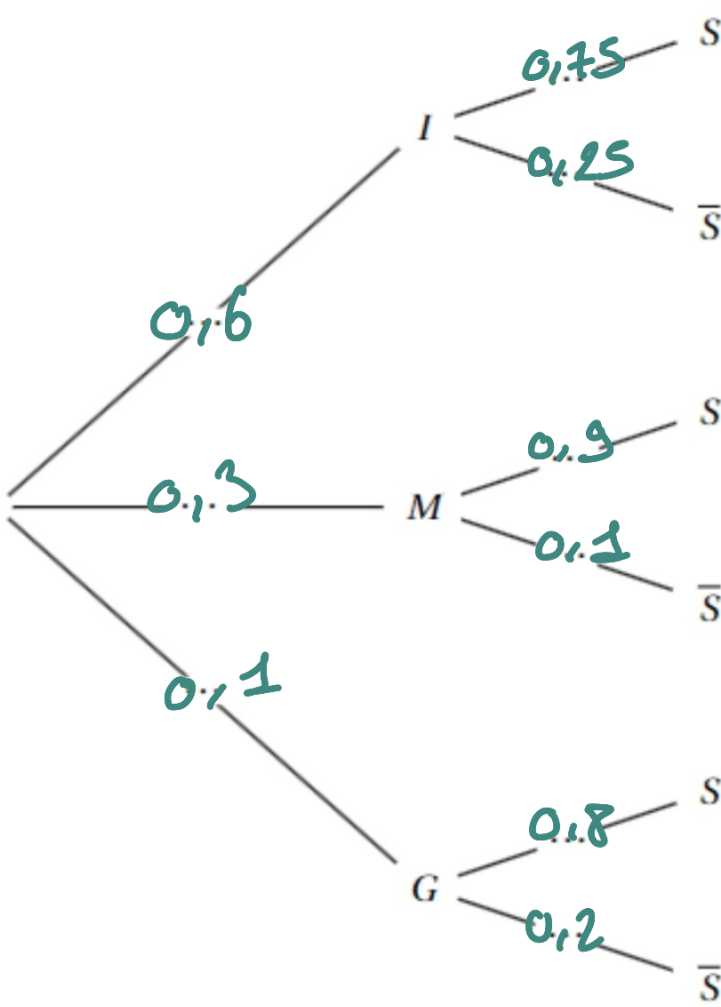
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ?
On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

$$\textcircled{a} : 0,8$$

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions a. et b. qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 .

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.

La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

• L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;

• L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$;

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .

b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

$$\textcircled{d}) P(S \cap I) = P_I(S) \times P(I)$$

$$= 0,75 \times 0,6$$

$$= 0,45$$

donc . . .

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap I) + P(S \cap M) + P(S \cap G) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

donc ...

$$4) P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{0,45}{0,8}$$

$$\approx 0,563.$$

donc ...

5) a) On répète 30 fois une même expérience de manière identiques et indépendantes dont le succès a une probabilité 0,8

Donc X suit $\mathcal{B}(30; 0,8)$.

$$b) \mathbb{P}(X \geq 25)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 24)$$

$$= 1 - 0,572$$

$$= 0,428$$

$$c) \mathbb{P}(X \leq n-1) > 0,99$$

$$1 - \mathbb{P}(X = n) > 0,99$$

$$- \mathbb{P}(X=0) > \underbrace{0,99 - 1}_{-0,01}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=0)}_{0,8^n} \leq 0,01$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = p^n$$

$$\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$$

$$0,8^n \leq 0,01$$

$$n \underbrace{P_n(0,8)}_{<0} \leq P_n(0,01)$$

$$n \geq \frac{P_n(0,01)}{P_n(0,8)} \approx 21$$

done if fact interger
 au minimum 21 client