

Dérivation

exercice :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3x - 5$$

1) Déterminer la dérivée de f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Donner les coordonnées des potentiels extrema.

$$\Delta < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
	signe de a	

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
	signe a	signe a

$$\bullet f'(x) = 15x^2 - 4x - 3$$

$$\bullet \Delta = 196$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{3}{5}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
f'	$+$	ϕ	$-$	$+$
f		$-\frac{119}{27}$		$-\frac{161}{25}$

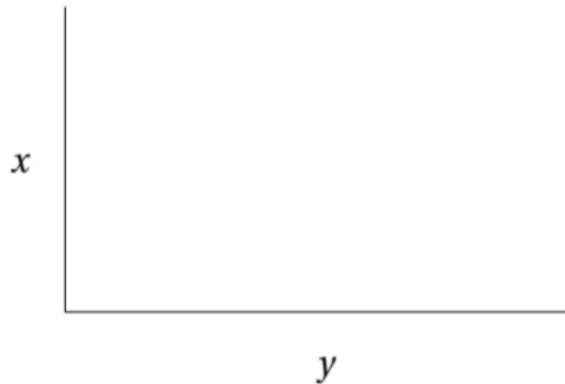
$$\begin{aligned}
 T_2 f : y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\
 &= 49(x-2) + 21 \\
 &= 49x - 98 + 21 \\
 &= 49x - 77.
 \end{aligned}$$

EXERCICE 18

Monsieur et Madame Dupont souhaitent créer un potager de forme rectangulaire, le long du mur de leur maison.

Pour cela, ils disposent de 15 m de grillage pour clôturer les trois côtés, le 4^{ème} côté étant le mur. Le potager devra avoir la plus grande surface possible.

On pose x et y les dimensions, en mètre, du potager, comme indiqué sur le dessin :



1. A quels intervalles appartiennent x et y ?
2. Démontrer que : $y = 15 - 2x$.
3. En déduire que la surface du potager est égale à l'expression : $-2x^2 + 15x$.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 15x$$

- a. Calculer $f'(x)$.
- b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$.
- c. En déduire que la fonction f admet un maximum.
Quel est ce maximum? En quelle valeur est-il atteint?
- d. Interpréter les résultats de la question 4.c. dans le contexte de l'exercice.

1) $x, y \in [0 ; 15]$

2) $2x + y = 15$

d'où : $y = 15 - 2x$.

3) $\text{cfice} = x \times y$

$$= x(15 - 2x)$$

$$= 15 - 2x^2$$

$$ax + b$$

$a > 0$

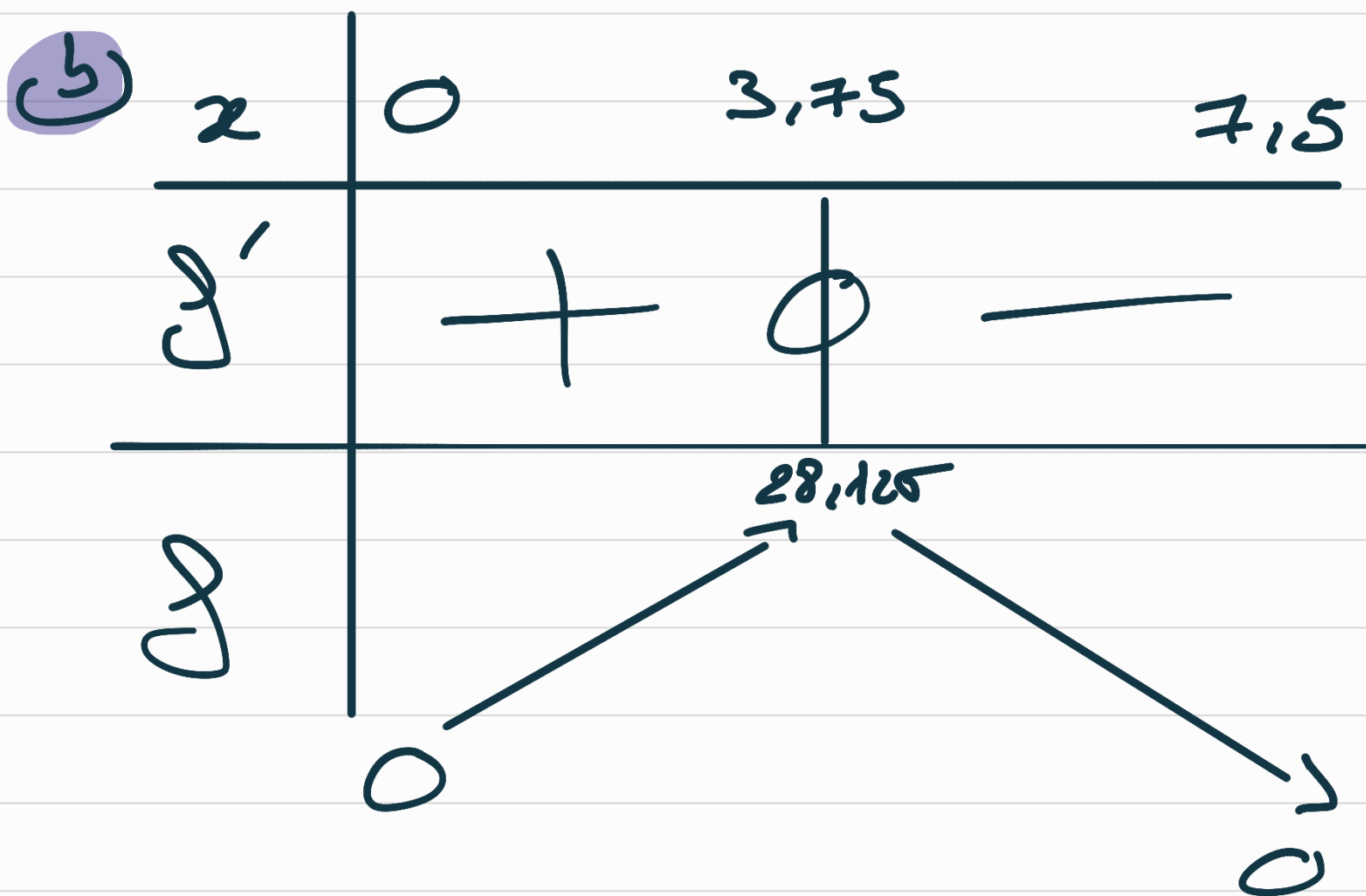
$a < 0$

$$x \quad -\infty \quad -3/a + \infty$$

$$- \quad 0 \quad +$$

x	$-\infty$	$-3/a$	$+\infty$
	+	ϕ	-

4) a) $f'(x) = -4x + 15$



c) f admet un maximum en $x = 3,75$ et vaut 28,125.

d) Ainsi pour que le potager soit le plus grand possible il faut que $x = 3,75\text{ m}$ et

$$y = 15 - 2 \times 3,75 = 7,5 \text{ m}$$

EXERCICE 19

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire, en euros, réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.

La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 45]$ par :

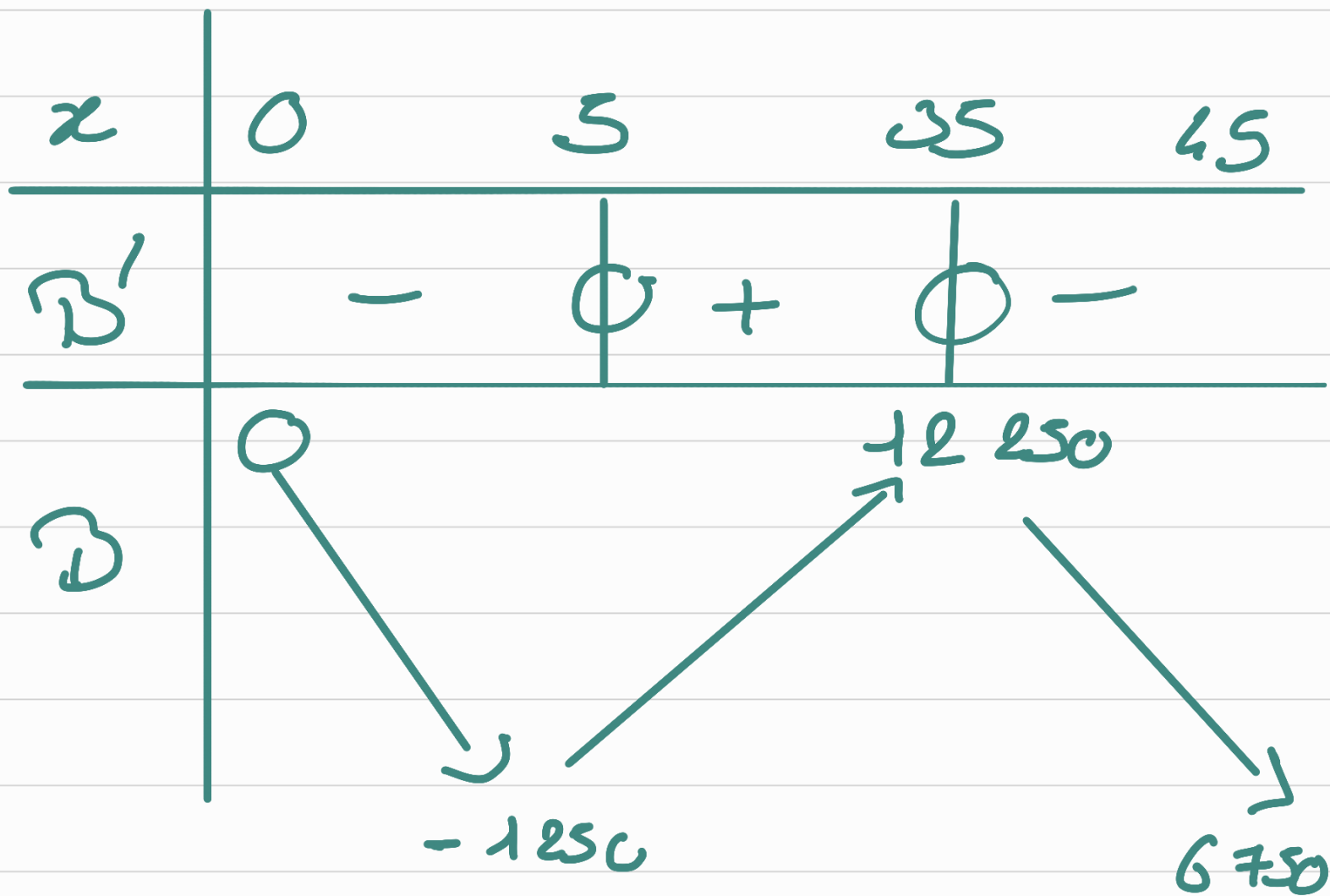
$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. ~~Mettre que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.~~
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 45]$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction B .
5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal? A combien s'élève-t-il alors?

$$B'(x) = -3x^2 + 120x - 525$$

$$\Delta = 8100$$

$$x_1 = 35 \qquad x_2 = 5$$



Le bénéfice est maximal
 pour 35 truffes et il s'élève
 à 12 250 €.

$$\sqrt{ax+b} \longrightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$(ax+b)^2 \longrightarrow 2 \times a \times (ax+b)$$

$$\frac{1}{ax+b} \longrightarrow -\frac{a}{(ax+b)^2}$$

$$(ax+b)^n \longrightarrow n \times a \times (ax+b)^{n-1}$$

exercice:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{3}^u \times \overbrace{(x+1)^2}^v - \overbrace{(3x+2)}^u \times \overbrace{2x+2}^{v'}}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3(x^2+2x+1) - 2(3x+2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^2+6x+3 - 6x^2-6x-4x-2}{(x+1)^4}$$

$$= \underline{\underline{-3x^2-4x+1}}$$