

Statistiques

① Loi Normale multivariée

Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

On dit que X suit une Loi normale multivariée de paramètre $\mu = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et une matrice inversible $\Sigma(\sigma_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ si elle a une fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2} {}^t(x-\mu) \Sigma^{-1} (x-\mu)}$$

avec $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

on dit $X \sim \mathcal{D}_n(\mu; \Sigma)$.

De plus si $\mu = 0_n$ et $\Sigma = I_n$, alors on dit que X suit une loi normale multivariée standard $\mathcal{N}_n(0_n, I_n)$

→ si $X \hookrightarrow \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, alors

$$\mu = {}^t(E[X_1], \dots, E[X_n])$$

$$\text{et } \Sigma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$$

→ Le coefficient de corrélation entre X_i et X_j :

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \times \text{Var}(X_j)}}$$

→ Les composantes $X_1, \dots, X_n$
sont indépendantes si et seulement
si Σ est diagonale.

→ si $X \subset \mathcal{D}_n(\mu, \Sigma)$, alors

- $aX \subset \mathcal{D}_1(a\mu; a\Sigma a)$

avec $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

- $AX \subset \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(A\mu; A\Sigma {}^tA)$

avec $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{P} \times n}$

② Vecteurs Gaussiens

→ on dit que $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur gaussien si pour tout $a = {}^t(a_1, \dots, a_n)$:

$$\langle a, X \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

suit une loi normale multivariée.

→ si $x_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ et que les x_i sont indépendants, alors $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur Gaussien.

→ Si $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur Gaussien, alors :

$$\mu = E[X] = {}^t(E[x_1], \dots, E[x_n]).$$

et sa matrice de covariance est donnée par :

$$\Sigma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$$

$\Rightarrow \Sigma$ est symétrique positive.

$\rightarrow$ Si $\mu = 0_n$ et $\Sigma = I_n$,
alors X est un vecteur Gaussien
centré réduit.

$\rightarrow$ Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants
alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est Gaussien
et Σ est diagonale

$\rightarrow$ Soient $X_1, \dots, X_n$ soit Gaussiennes
Alors les X_i sont indépendants si
et seulement si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est
Gaussien et Σ est diagonale

→ $X \hookrightarrow \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ alors

$$Y = AX + b \hookrightarrow \mathcal{N}_p(A\mu + b, A\Sigma A^t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{p \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

→ Si Σ est une matrice symétrique positive, alors il existe un vecteur Gaussien X d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance Σ .

→ Théorème de Cochran

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$ et

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\mathbb{R}^n = E_1 \perp \dots \perp E_p.$$

Somme directe + $E_i \perp E_j$

Abs les projections $\pi_{E_1} X, \dots, \pi_{E_p} X$ de X sont des vecteurs Gaussiens indépendants de lois respectivement :

$$\mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_1}), \dots, \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_p}).$$

De plus, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$
 $Y_i = \frac{1}{\sigma^2} \|\pi_{E_i} X\|^2 \hookrightarrow \chi^2(\dim E_i)$

et $Y_1, \dots, Y_p$ sont indépendantes.

③ Loi multinomiale

Soit $(X_1, \dots, X_r)$ un vecteur.

On dit que $(X_1, \dots, X_r)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$, et $p_1, \dots, p_r$ avec $p_i \in]0, 1[$, $r \in \mathbb{N}^*$, avec $p_1 + \dots + p_r = 1$ si :

$$\rightarrow X_1(\Omega) = \dots = X_r(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}((X_1 = k_1) \cap (X_2 = k_2) \cap \dots \cap (X_r = k_r))$$

$$= \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}, & \text{si } \underline{k_1 + \dots + k_r = n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bullet E[X^2] = \sum_{x \in X(\omega)} x^2 \times \mathbb{P}(X=x)$$

$$\bullet E[X^2] = \int_{X(\omega)} x^2 \cdot f_X(x) dx.$$

$$\bullet V(X) = E[X^2] - E[X]^2 \\ = E[(X - E[X])^2].$$

→ f continue par morceaux

→ f positive → $\int_{\mathbb{R}} f = 1.$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$$

$$\text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i).$$