TD 1

exercice 5 :

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \ : \ I \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

→ Comme $A_1, \dots, A_n$ est une partition de $\mathbb{R}$, alors

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R}.$$

en posant $I = \{1, \dots, n\}$,

on a $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} A_i$, et

donc $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

→ Soit $A \in \mathcal{A}$.

il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que : $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

or $A^c = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$

$= \bigcup_{i \notin I} A_i$

on pose $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$

et alors $\boxed{A^c = \bigcup_{i \in J} A_i}$ avec $J \subset \{1, \dots, n\}$.

donc $A^c \in \mathcal{A}$.

→ Soit $(B_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

$\forall n \geq 1$, $\exists I_n \subset \{1, ..., n\}$ tel que :

$$B_n = \bigcup_{i \in I_n} A_i .$$

or $$\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i \in I_n} A_i$$

$$= \bigcup_{i \in \bigcup_{n \geq 1} I_n} A_i$$

on pose $J = \bigcup_{n \geq 1} I_n$,

et $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{i \in J} A_i$, avec

$J \subset \{1, ..., n\}$.

Donc $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{A}$.

DONC : $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$

---

exercice 6 :

Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ un ensemble de partie de E.

La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est la plus petite tribu sur E qui contient $\mathcal{E}$.

1) $\sigma(\{a;b\}) = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, E\}$

$\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$

$E = \{a, b, c\}$.

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\},$

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$.

2) Sur ensemble fini, alors les tribus sont les partitions de E.

- $\{\emptyset, E\}$
- $\{\emptyset, E, \{a\}, \{b,c\}\}$
- $\{\emptyset, E, \{b\}, \{a,c\}\}$
- $\{\emptyset, E, \{c\}, \{a,b\}\}$
- $\{\emptyset, E \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$.

3) $\sigma(\{a\}) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b,c\}\}$

$\sigma(\{b\}) = \{\emptyset, E, \{b\}, \{a,c\}\}$

• $\sigma(\{a\}) \cup \sigma(\{b\})$

$= \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

or $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$

$\notin \sigma(\{a\}) \cup \sigma(\{b\})$

donc ce n'est pas une tribu.