

Logarithme

① Définitions et propriétés

$$\rightarrow \ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

$\rightarrow$ La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \ln(x)$.

$$\rightarrow \ln(1) = 0 \quad \rightarrow \ln(e) = 1$$

$$\rightarrow \ln(x) < 0 \text{ sur }]0; 1]$$

② Dérivée et limites

$$\rightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

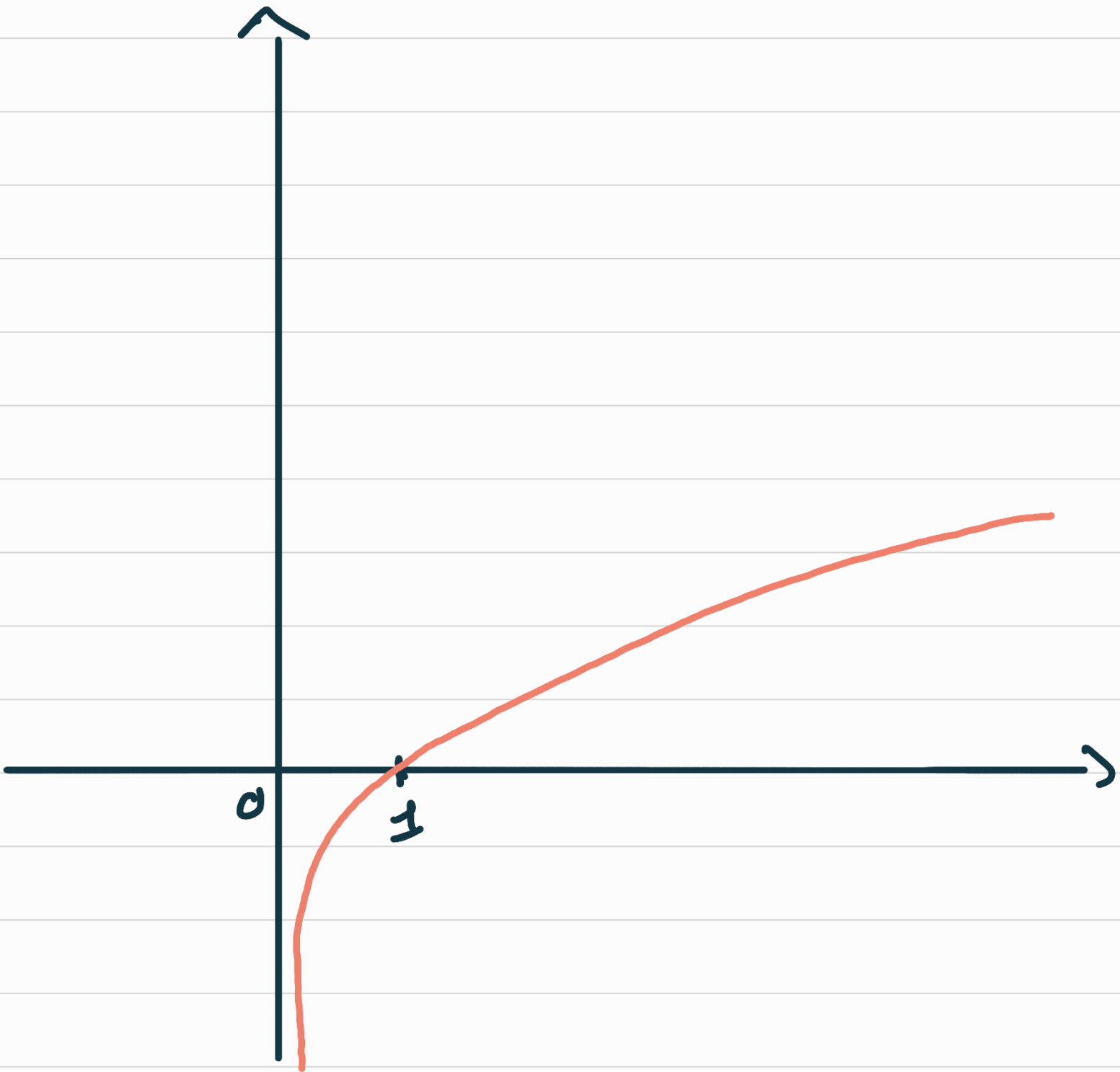
$$\rightarrow (\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

$\rightarrow$ La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\rightarrow$ La fonction logarithme est concave sur $]0; +\infty[$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



→ Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n h(x) = 0.$$

Top 1 : exp

Top 2 : x^n

Top 3 : A_n

③. Propriétés algébriques

$$\rightarrow \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$$

$$\hookrightarrow e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\rightarrow \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\hookrightarrow e^{a-b} = e^a / e^b.$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\rightarrow \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\hookrightarrow (e^a)^n = e^{a \times n}$$

$$\rightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\rightarrow \ln(x) = \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\rightarrow \ln(x) > \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow x > y$$

$$\rightarrow x = e^y \Leftrightarrow \ln(\underbrace{x}_{x>0}) = y$$

$$\rightarrow \ln(\underbrace{x}_{x>0}) = y \Leftrightarrow x = e^y$$

exercice: Simplifier.

$$\bullet \ln(e^2) = 2$$

$$\bullet e^{\ln(5)} = 5$$

$$\bullet \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \ln(e^1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^6}{e^3}\right) = \ln(e^{6-3}) \\ = \ln(e^3) = 3$$

exercice : Exprimer en fonction de $\ln(2)$.

$$\begin{aligned} \bullet \ln(8) &= \ln(2 \times 4) \\ &= \ln(2 \times 2 \times 2) \\ &= \ln(2^3) \\ &= 3 \ln(2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \ln(\sqrt{32}) &= \frac{1}{2} \ln(32) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2 \times 2 \times 2^3) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2^5) = \frac{5}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad P_n\left(\frac{e}{4}\right) \\
 &= P_n(e) - P_n(4) \\
 &= 1 - P_n(2^2) \\
 &= 1 - 2 P_n(2).
 \end{aligned}$$

exercice : Écrire avec un seul $\ln$.

$$\bullet \ln(50) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{50}{2}\right)$$

$$= \ln(25)$$

$$= \ln(5^2)$$

$$= 2\ln(5).$$

$$\bullet 3\ln(2) - \ln(8) + \ln(4).$$

$$= \ln(2^3) - \ln(8) + \ln(4)$$

$$= \cancel{\ln(8)} - \cancel{\ln(8)} + \ln(4)$$

$$= \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2).$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet D_n \left(\frac{2}{3} \right) + D_n \left(\frac{3}{4} \right) + D_n \left(\frac{4}{5} \right) \\
 &= D_n(2) - \cancel{D_n(3)} + \cancel{D_n(3)} - \cancel{D_n(4)} \\
 &\quad + \cancel{D_n(4)} - D_n(5)
 \end{aligned}$$

$$= D_n(2) - D_n(5)$$

$$= D_n \left(\frac{2}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet P_n(3e) &= P_n(3) + P_n(e) \\ &= P_n(3) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P_n((2+\sqrt{3})^{20}) + P_n((2-\sqrt{3})^{20}) \\ &= P_n((2+\sqrt{3})^{20} \times (2-\sqrt{3})^{20}) \\ &= P_n((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^{20} \\ &= 20 P_n((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})) \\ &= 20 P_n(2^2 - (\sqrt{3})^2) \\ &= 20 P_n(4 - 3) \\ &= 20 P_n(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$= \ln(1) - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(5)}$$

$$+ \cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(7)} + \cancel{\ln(7)} - \ln(9)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= -\ln(9).$$