

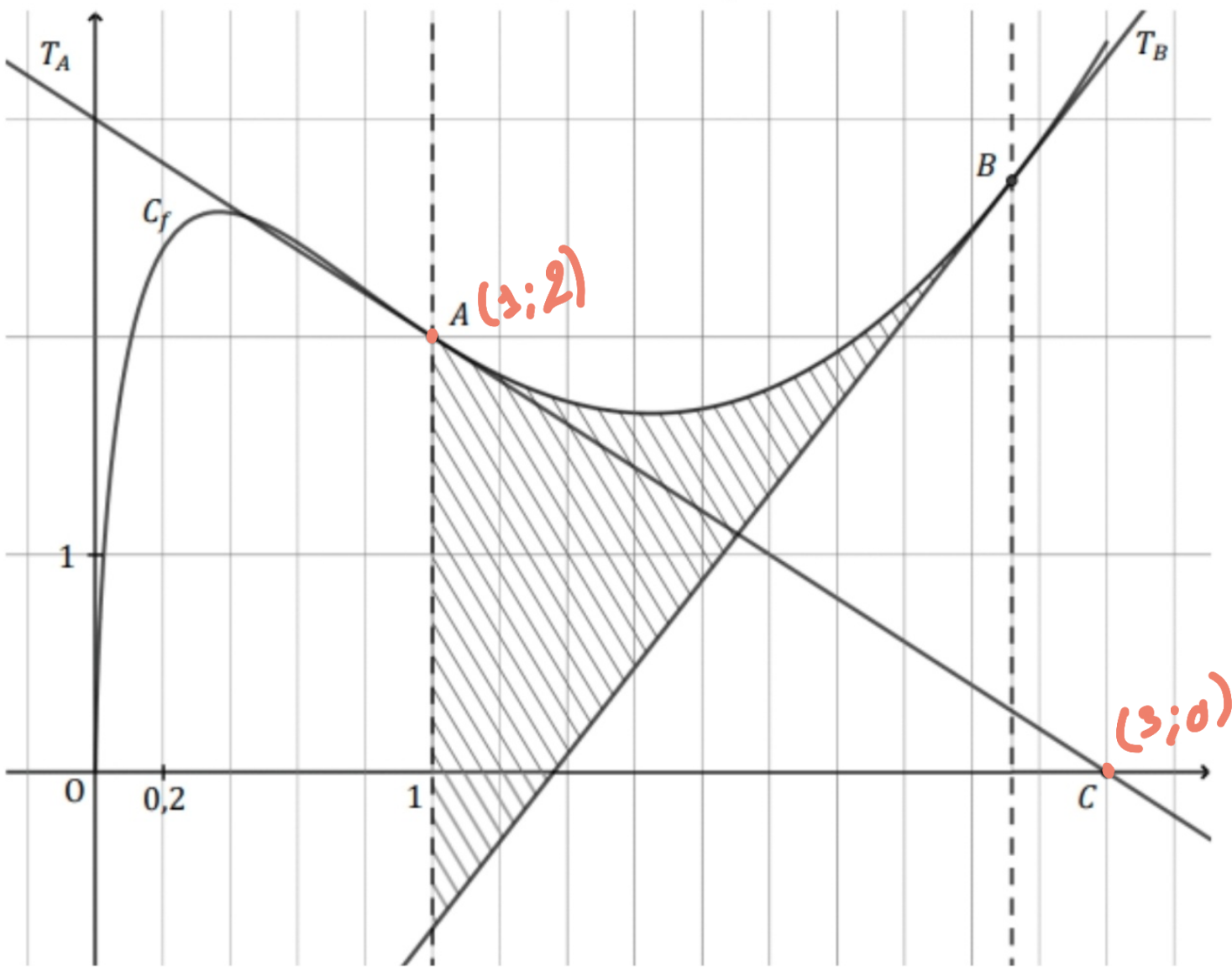
Exercice 2 (6 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée C_f , sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à C_f au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B , tangente à C_f au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0, 2)$?

$$1) f'(1) = \frac{2-0}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\hookrightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

2) Graphiquement, l'équation $f'(x) = 0$ admet 2 solutions dans l'intervalle $]0; 3]$.

3) Graphiquement, la fonction f est concave sur $]0; 0,2]$
 donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 \right)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.

En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln(x) + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

$$1) \Delta = -7 < 0$$

donc l'équation n'
admet pas de solution
dans $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{impossible car } x > 0 \\ \text{ou} \\ 2\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = \ln(x) \end{cases}$$

or il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc $f(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}; +\infty$.
et donc Γ_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$2) x(P_n(x))^2 \left(2 - \frac{3P_n(x)}{P_n(x)^2} + \frac{2}{P_n(x)^2} \right)$$

$$= x(P_n(x))^2 \left(2 - \frac{3}{P_n(x)} + \frac{2}{P_n(x)^2} \right)$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{P_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{P_n(x)^2} = 0$$

donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{h(x)} + \frac{2}{h(x)^2} = 2$$

et par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(h(x))^2 = +\infty.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) a) $f'(x) = 2(h(x))^2 + h(x) - 1.$

$\underbrace{(u^2)'}_{(u^2)'} = 2u'u$

$$f''(x) = 2x \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} h(x) + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{4h(x)}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} (4h(x) + 1).$$

b) pour $x \in \mathbb{R}_0; +\infty \subset \mathbb{C}$, $\frac{1}{x} > 0$

$$g''(x) > 0$$

$$4D_n(x) + 1 > 0$$

$$4D_n(x) > -1$$

$$D_n(x) > -\frac{1}{4}$$

$$e^{D_n(x)} > e^{-\frac{1}{4}}$$

$$x > e^{-1/4}$$

x	0	$e^{-1/4}$	$+\infty$
g''	<u>—</u>	0	+

donc f est concave sur $]0; e^{-1/4}]$
et f est convexe sur $[e^{-1/4}; +\infty[$.

D'où l'abscisse du point d'inflexion est $x = e^{-1/4}$.

c) L'abscisse de la tangente T_B étant e et que on a $e > e^{-1/4}$, alors la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur $[1; +\infty[$ car f est convexe sur $[1; +\infty[$.