

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1.9u_n(1 - u_n)$. $u_0 = 0.1$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1.9x(1 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

2. ~~En annexe sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite D d'équation $y = x$.~~

~~Tracer sur le schéma les cinq premiers termes de la suite (u_n) , et conjecturer le sens de variation de la suite ainsi que sa limite éventuelle.~~

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

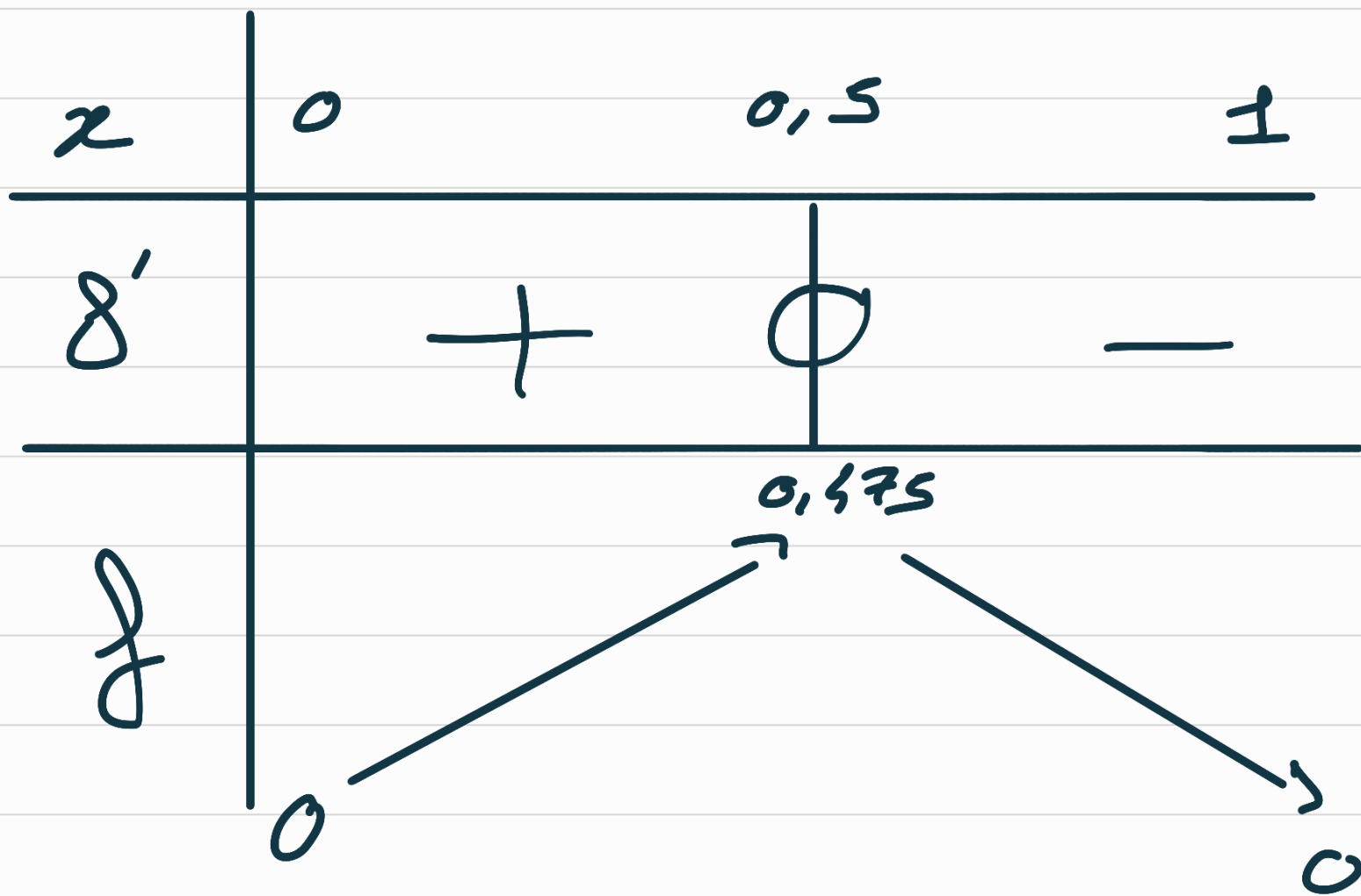
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

1) a) $f'(x) = 1,9(1-x) + 1,9xx-1$

$$= 1,9 - 1,9x - 1,9x$$
$$= 1,9 - 3,8x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,9 - 3,8x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1,9}{-3,8} = 0,5.$$



b) D'après le tableau de variations, $0 \leq g(x) \leq 0,475 \leq 1$

donc pour $x \in [0; 1]$, on a

$$g(x) \in [0; 1].$$

3) a) • $u_0 = 0, 1$
 • $u_1 = 0, 171$

✓ $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$

donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité:

Supposons la proposition vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et f est croissante.

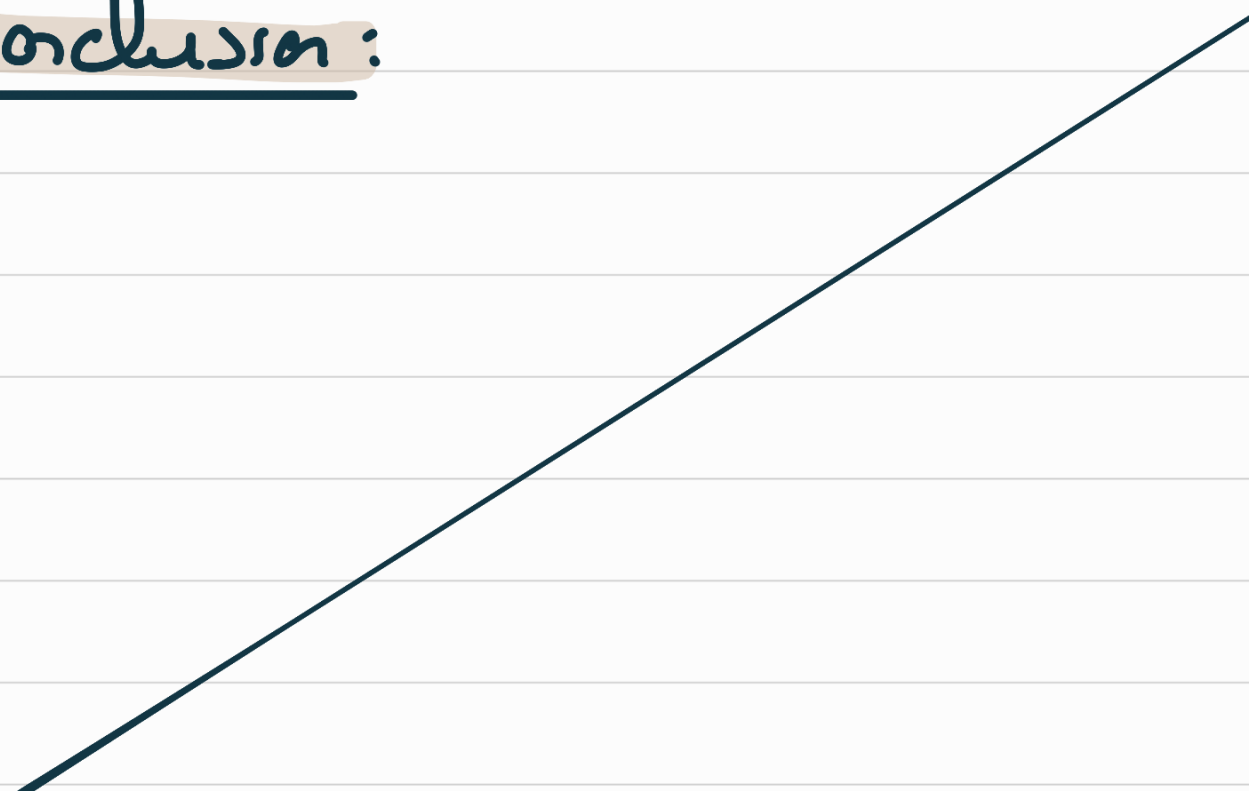
d'où :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,475 \leq \frac{1}{2}$$

donc la proposition est vraie
au rang $n+1$.

Conclusion :



b) D'après la récurrence,
la suite (u_n) est croissante
et majorée par $\frac{1}{2}$, donc
elle converge.

Partie 2: étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 10te^{-0,01t} + 20$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a. Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10)e^{-0,01t}$.
b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0; +\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

$$1) \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,01t = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

donc par composition de limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,01t} = \underline{0}$$

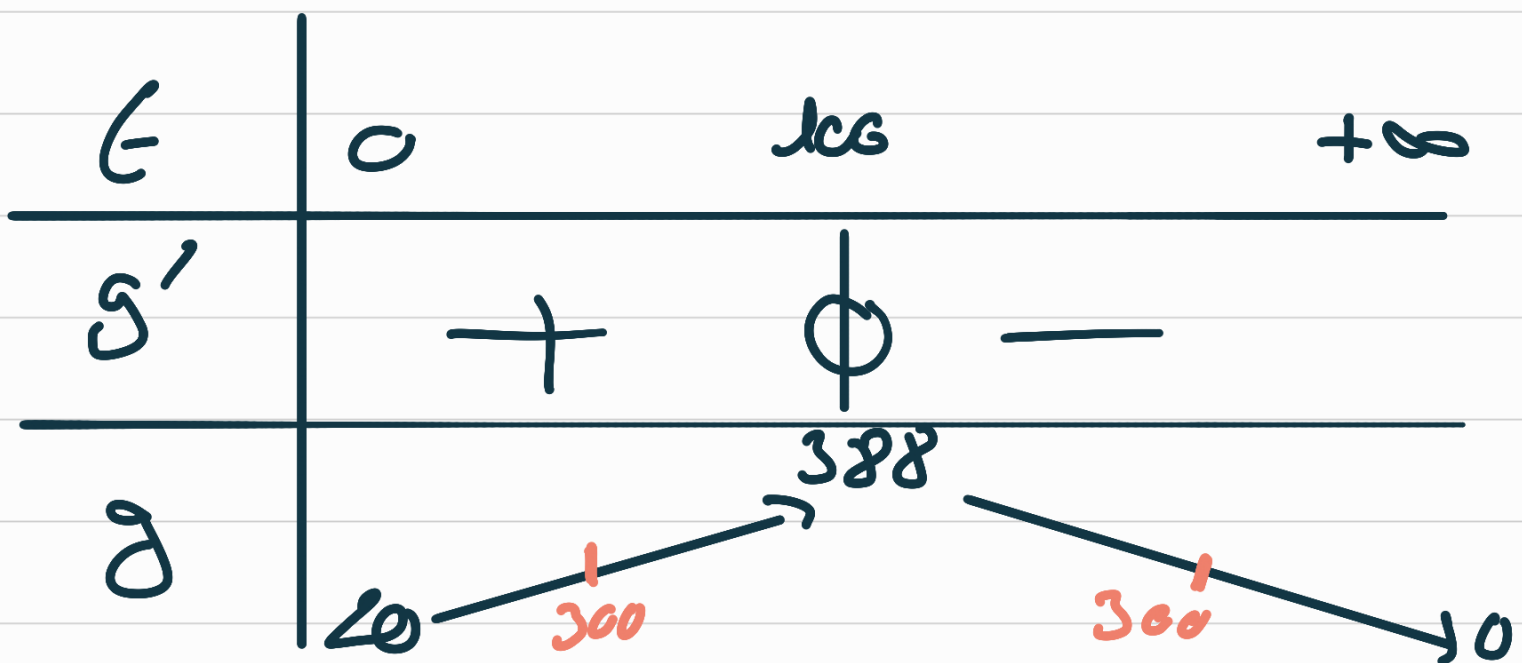
Donc par croissances comparées

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0.$$

2) $g(t) = \underbrace{10t}_u e^{\overbrace{-0,01t}^v} + 20$
 $u \rightarrow u' = 10$ $v \rightarrow v' = -0,01e^{0,01t}$

a) $g'(t) = 10e^{-0,01t} + 10t \times -0,01e^{-0,01t}$
 $= e^{-0,01t} (10 + 10t \times -0,01)$
 $= \underbrace{e^{-0,01t}}_{>0} (\underbrace{10 - 0,1t}_{?})$

b) $10 - 0,1t = 0 \Leftrightarrow t = 100$



- 3) • g est continue sur $[0; 100]$
- g est strictement croissante sur $[0; 100]$
- $g(0) = 20 < 300$ et $g(100) \approx 388 > 300$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(t) = 300$ admet une unique solution sur $[0; 100]$.

-
- g est continue sur $[-100; +\infty[$
- g est strictement décroissante sur $[-100; +\infty[$
- $g(100) \approx 388 > 300$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0 < 300$

donc d'après le corollaire
du théorème des valeurs
intermédiaires l'équation $g(t) = 300$
admet une unique solution sur
 $[t_0; +\infty[$.

Donc l'équation $g(t) = 300$
admet exactement 2 solutions
sur $[0; +\infty[$.