

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python algo(p) où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :  
    u = 1/4  
    n = 0  
    while u > 10**(-p):  
        u = 1/2*u*(1 - u)  
        n = n+1  
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande algo(p) de renvoyer une valeur.

1) on a : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

donc par le théorème des gendarmes, $(u_n)_n$ converge et sa limite vaut 0.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\begin{aligned} 4) \quad a) \quad v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n^2) \\ &= -\ln(5) + 2\ln(u_n) \\ &= 2v_n - \ln(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad w_{n+1} &= v_{n+1} - \ln(5) \\ &= 2v_n - \ln(5) - \ln(5) \end{aligned}$$

$$= 2v_n - 2h_n(s)$$

$$= 2(v_n - h_n(s))$$

$$= 2w_n.$$

donc la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme : $w_0 = v_0 - h(s)$

$$= h(v_0) - h(s)$$

$$= h(4) - h(s)$$

$$= h\left(\frac{4}{5}\right).$$

c) Comme (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = h\left(\frac{4}{5}\right)$, alors :

$$w_n = w_0 \times 2^n = h\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De plus, $w_n = v_n - h(s)$,

donc $v_n = w_n + h(s)$

$$= h\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + h(s).$$

5) . $v_n = h\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + h(s)$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$.

et $h\left(\frac{4}{5}\right) < 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

. $v_n = h(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{v_n}$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1) \text{ et } S(0; 1; 4)$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 - b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5.
 - a. Calculer la longueur SA .
 - b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

1) donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux, et donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires et donc le triangle ABC est rectangle en A .

2) Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car

orthogonaux et donc définissent un plan (ABC) .



donc $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (ABC) .

b) $2x + y - z + d = 0$

or $A(2; -1; 0) \in (ABC)$

$$2 \times 2 - 1 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$2x + y - z - 3 = 0$$

c) donc S n'appartient pas au plan (ABC) et donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3) a)

$$\begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \\ z = z_A + z_u t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Comme (d) est orthogonale au plan (ABC) , alors (d) a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

(d):

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

b)

$$2 \times 2t + 1 + t - (4 - t) - 3 = 0$$

$$4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0$$

$$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$$

done en remplaçant t , on
trouve :

$$H(2; 2; 3).$$