

$$\underline{\tau \supset \mathcal{D} = 1}$$

exercice 7:

Supposons que $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$

$$\alpha \quad T_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \tau} \{ \tau \text{ tribu sur } E \}$$

et $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$, donc comme $T_{\mathcal{B}}$ est une tribu qui contient $\mathcal{B}$, alors elle contient aussi $\mathcal{A}$.

$$\hookrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B} \in T_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{A} \in T_{\mathcal{B}}.$$

α $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

Donc $T_{\mathcal{A}} \in T_{\mathcal{B}}$.

exercice 9 :

- $\mu(\emptyset) = 0$

- $(A_n)_n$ une famille dénombrable de parties de E deux à deux disjointes :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- $\text{Card}(\emptyset) = 0$, car $\emptyset$ ne contient aucun éléments.

- Soit $(A_n)_n$ une famille de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes.

$\rightarrow$ si $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Card}(A_i) = +\infty$, $\forall i$
il y a une infinité de $\text{Card}(A_i) = +\infty$
alors $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = +\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Card}(A_i)$

$\rightarrow$ si $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Card}(A_i) < +\infty$.

Comme $\text{Card}(A_i) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, la somme finie implique qu'il y a un nombre fini de termes non nuls.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall i > N$, $A_i = \emptyset$.

et alors $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^N A_i$

et pour une union disjointe finie, on a :

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Ainsi on a,

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{card}(A_i).$$

Donc dans tous les cas on a :

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Card}(A_i)$$

Donc card est une mesure sur $(\mathbb{N}; \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

exercice 10:

1) $v(A) = \mu(B \cap A)$

• $v(\emptyset) = \mu(B \cap \emptyset)$

$$= \mu(\emptyset)$$

$$= 0 \quad \text{car } \mu \text{ est une mesure sur } (X, \mathcal{C})$$

• Soit $(A_n)_n$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints

But : $v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$

$$v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)\right)$$



et $(B \cap A_n)_n$ sont encore deux à deux disjointes.

D'après comme μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

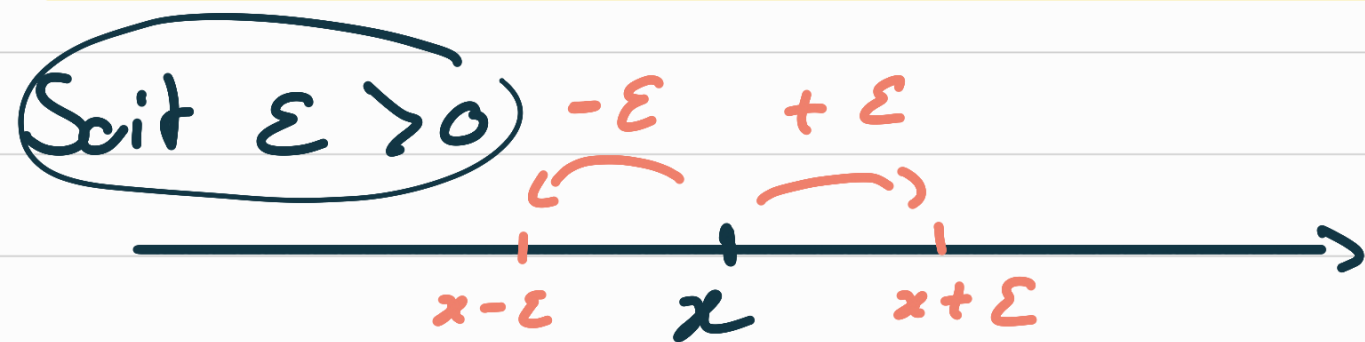
Alors :

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \end{aligned}$$

exercice 12:

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$A, B \in \mathcal{C}$ tel que $A \subset B$
alors $\mu(A) \leq \mu(B)$



on a $\{x\} \subset]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$

et par la propriété de
croissance :

$$\begin{aligned}\lambda(\{x\}) &\leq \lambda(]x - \varepsilon; x + \varepsilon[) \\ &= (x + \varepsilon) - (x - \varepsilon) = 2\varepsilon\end{aligned}$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, alors on a :

$$\lambda(\{x\}) = 0.$$

b) Soit $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$.

Par la propriété de sous-additivité, on a :

$$\lambda\left(\bigcup_{n \geq 0} \{x_n\}\right) \leq \sum_{n \geq 0} \lambda(\{x_n\})$$

or d'après la question précédente $\lambda(\{x_n\}) = 0, \forall n \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{d'où : } 0 &\leq \lambda\left(\bigcup_{n \geq 0} \{x_n\}\right) \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{clnc} \quad \lambda \left(\bigcup_{n \geq 0} \{x_n\} \right) = 0$$