

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB) .

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

méthode : Équation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + x_{\vec{u}} t \\ y = y_A + y_{\vec{u}} t \\ z = z_A + z_{\vec{u}} t \end{cases}, \quad \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

1) • $\vec{AD}(4; 2; -6)$

donc une équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } \vec{u}(-2; -1; 3) = -2 \vec{AB}$$

donc $\vec{u}$ est directeur de (AB)

et

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est une Équation paramétrique de (AB) et donc l'affirmation est vraie.

méthode : vecteur normal à (P) .

→ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs de (P) .

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

donc $\vec{n}$ normal au plan.

• $\vec{OA}(-1; 0; 5)$ et $\vec{OB}(3; 2; -1)$ sont non colinéaires donc définissent un plan (OAB).

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = 5 \times -1 + -2 \times 0 + 1 \times 5 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{OB} &= 5 \times 3 + -2 \times 2 + -1 \times 1 \\ &= 10 \neq 0\end{aligned}$$

donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAB) et l'affirmation est fautive.

méthode : position relative droites

* parallèles $\Leftrightarrow$ les vecteurs directeurs sont colinéaires.

$\hookrightarrow$ confondues $\Rightarrow$ un point en commun

* sécantes $\Leftrightarrow$ résoudre un système.

$\hookrightarrow$ perpendiculaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs directeurs sont orthogonaux.

* non coplanaires $\Rightarrow$ ni parallèles ni sécantes.

2). $\vec{u} (1; -1; 2)$ directeur de (d)
 $\vec{v} (4; 4; -6)$ directeur de (d')

$$\cdot \quad \frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4} \neq \frac{2}{-6}$$

donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et donc

Des droites ne sont pas parallèles.

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \left\{ \begin{array}{l} 4s + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{array} \right. \rightarrow k = -14 + 4s \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = -14 + 4s \\ 8 - (-14 + 4s) = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{array} \right. \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = -14 + 4s \\ 8 + 14 - 4s = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = -14 + 4s \\ -8s = -20 \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -14 + 4s \\ s = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2} \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ s = 5/2 \\ -6 + 2 \times -4 = 1 - 6 \times \frac{5}{2} \end{cases}$$

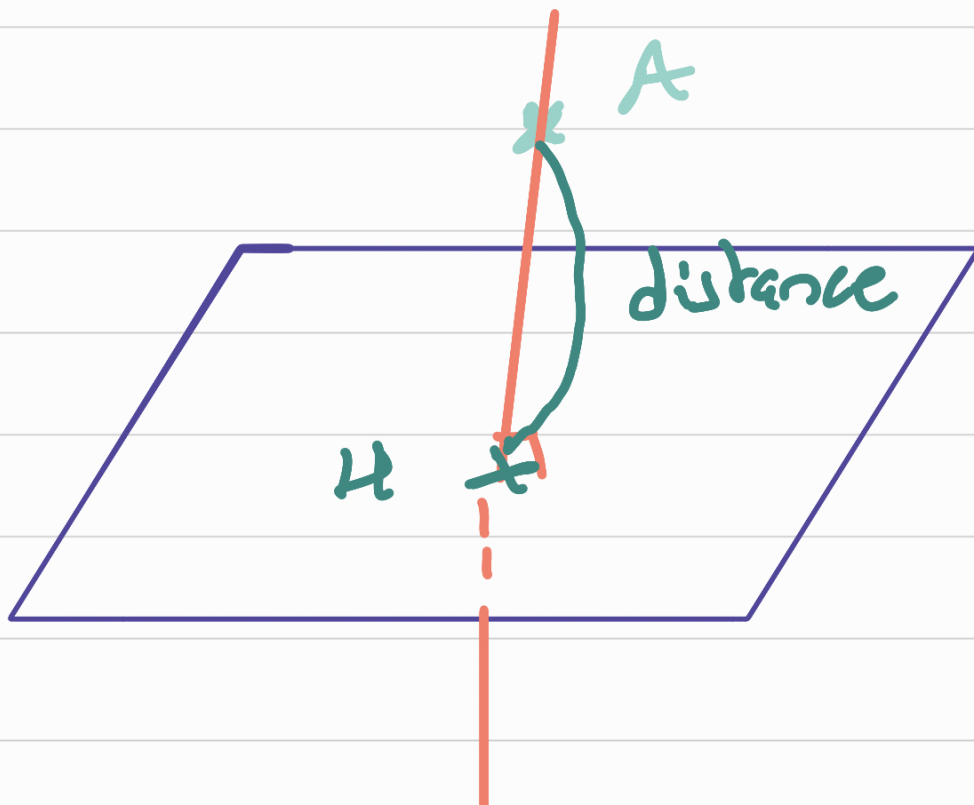
-14
-14

donc les droites sont sécantes et les coordonnées du point d'intersection sont $(11; 12; -14)$

Donc les droites (d) et (d') sont coplanaires et donc l'affirmation est fausse.

méthode: distance point à un plan.

- trouver l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan et passant par le point.
- intersection du plan et de la droite $\Rightarrow$ projeté orthogonal
- calculer la distance entre point et son projeté.



3). un vecteur directeur de (d) orthogonale au plan (P) et passant par C est $\vec{n}(1; -1; 1)$

Donc une équation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet x - y + z + 1 = 0$$

$$2 + t - (-1 - t) + 2 + t + 1 = 0$$

$$2 + t + 1 + t + 2 + t + 1 = 0$$

$$3t + 6 = 0$$

$$t = \frac{-6}{3} = -2.$$

donc le projeté orthogonal
de C sur (P) est :

$$H(0; 1; 0)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$CH = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 4}$$

$$= \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

donc P' affirmation est vraie.

exercice 3:

2) a) $\vec{EH}(-1; 4; -1).$

$\vec{FG}(4; 0; -4)$

$$\begin{aligned}\rightarrow \vec{EH} \cdot \vec{FG} &= -1 \times 4 + 4 \times 0 + -1 \times -4 \\ &= -4 + 4 = 0\end{aligned}$$

donc $(EH) \perp (FG)$ ✓

$$\rightarrow (FG): \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow 2 = -1 + 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4}$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

$$-2 = 1 - 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4}$$

$\checkmark$

donc $H \in (FG)$.

Donc H projeté ortho de
 E sur (FG) .

$$3) \quad b) \quad 2x + y + 2z + d = 0$$

$$c \vdash E \in (EFG)$$

$$2 \times 3 - 2 + 2 \times -1 + d = 0$$

$$6 - 2 - 2 + d = 0$$

$$d = -2$$

$$\text{done} \quad 2x + y + 2z - 2 = 0.$$

c) Comme (d) est orthogonale au plan (EFG), alors un vecteur directeur est $\vec{n}$.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

d) $K \in (d) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} = 3 + 2t \Rightarrow t = -\frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} = 1 + t \Rightarrow t = -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{3} = 5 + 2t \Rightarrow t = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$K \in (EFG)$

$$\hookrightarrow 2 \times -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2 \times \frac{5}{3} - 2 = 0$$