

DS1 - Sujet A

exercice 2:

$$2) a) f'(x) = \frac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{4 + \cancel{12x} - \cancel{12x}}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{4}{(1+3x)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $P_n : \frac{1}{2^n} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2^n$.

Initialisation:

D'une part, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$.

D'autre part, $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$.

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons la propriété vraie pour un certain rang n , c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et

f est strictement croissante
sur $J \cdot \frac{1}{3} ; +\infty[$.

d'où :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{8}{7} \leq 2$$

donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2.$

et la propriété est vraie
au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété
est initialisée au rang $n=0$ et est
héréditaire à partir de ce rang,
donc par le principe de
récurrence on a montré que :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3) a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{\frac{1 + 3u_n - 4u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{\frac{1 - u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{4u_n}{\cancel{1+3u_n}} \times \frac{\cancel{1+3u_n}}{1-u_n}$$

$$= 4 \times \frac{u_n}{1-u_n} = 4v_n.$$

donc $v_{n+1} = 4v_n$ et la suite (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

$$\text{d'où } v_n = v_0 \times q^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$= 1 \times 4^n$$

$$\Rightarrow v_n = 4^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b) v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

$$\Leftrightarrow (1 - u_n) v_n = u_n$$

$$\Leftrightarrow v_n - u_n \times v_n = u_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = u_n (1 + v_n)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1 + v_n}.$$

donc $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

c) $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1} = \frac{4^n}{1 + 4^n}.$

exercice 3:

Partie A:

1) La fonction semble convexe sur $[-2; \frac{1}{3}]$ et concave sur $]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$.

2) Les points A et D sont les points d'inflexion de la courbe.