

Devoir - Maison

exercice 1 :

1) a) $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

b) donc f' est positive sur $\mathbb{R}$
 f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) on a pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} & x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x - \ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x - \left[\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= x - \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - \ln\left(x^2 + \frac{x^2}{x^2}\right) \\ &= x - \ln(x^2 + 1) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

donc $f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} P_n(x) = 0$$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

De plus, $x - 2P_n(x)$

$$= x \left(1 - \frac{2P_n(x)}{x} \right)$$

or par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{x} = 0$, et par

somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2P_n(x)}{x} = 1.$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty,$$

$$\text{d'où par produit de limites} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2A(x)}{x}\right) = +\infty$$

Ainsi par somme de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Partie D:

$$1) \quad u_n > 0$$

$$\text{or } u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \text{et } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{d'où : } f(u_n) > f(0)$$

$$u_{n+1} \geq 0$$

done ...

2) $u_{n+1} - u_n$

$$= \cancel{u_n} - p_n(u_n^2 + 1) - \cancel{u_n}$$

$$= -p_n(u_n^2 + 1)$$

$$\text{or } u_n^2 + 1 \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } p_n(u_n^2 + 1) \geq 0$$

et donc :

$$u_{n+1} - u_n = -p_n(u_n^2 + 1)$$

$$\leq 0$$

et la suite est décroissante.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone la suite (u_n) converge.

$$u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

4) (u_n) est convergente vers l et f est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème du point fixe l vérifie l'équation $l = f(l)$

$$l = f(l)$$

$$\cancel{l} = \cancel{l} - P_n(l^2 + 1).$$

$$0 = P_n(l^2 + 1)$$

$$\text{c)'} \text{ car } l^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow l^2 = 0 \\ \Rightarrow l = 0$$

donc la limite de la suite
(u_n) est 0

5) a) def seurt(h):

$$n = 0$$

$$u = 7$$

while $u > h$

$$n = n + 1$$

$$u = u - \ln(u^{**2} - 1)$$

return n.

b) $u_n \leq 0, 01$, à partir
du rang 97 car

$$u_{g_6} \simeq 0,010028 > 0,01$$

$$\text{et } u_{g_7} \simeq 0,00993 < 0,01.$$