

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

d. Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 0} x - 2 = -2$, donc

par somme de limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$$

donc par somme de Pimite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f'(x) &= 1 + \frac{1}{2}x \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x + 1}{2x}$$

$$\text{c)} \quad f'(x) = \frac{2x + 1}{2x} > 0$$

sur $]0; +\infty[$.

donc la fonction est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$d) f''(x) = \frac{2x \cdot 2x - (2x+1) \cdot 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2}$$

$$= \frac{-2}{4x^2} < 0$$

donc f est concave sur $]0; +\infty[$.

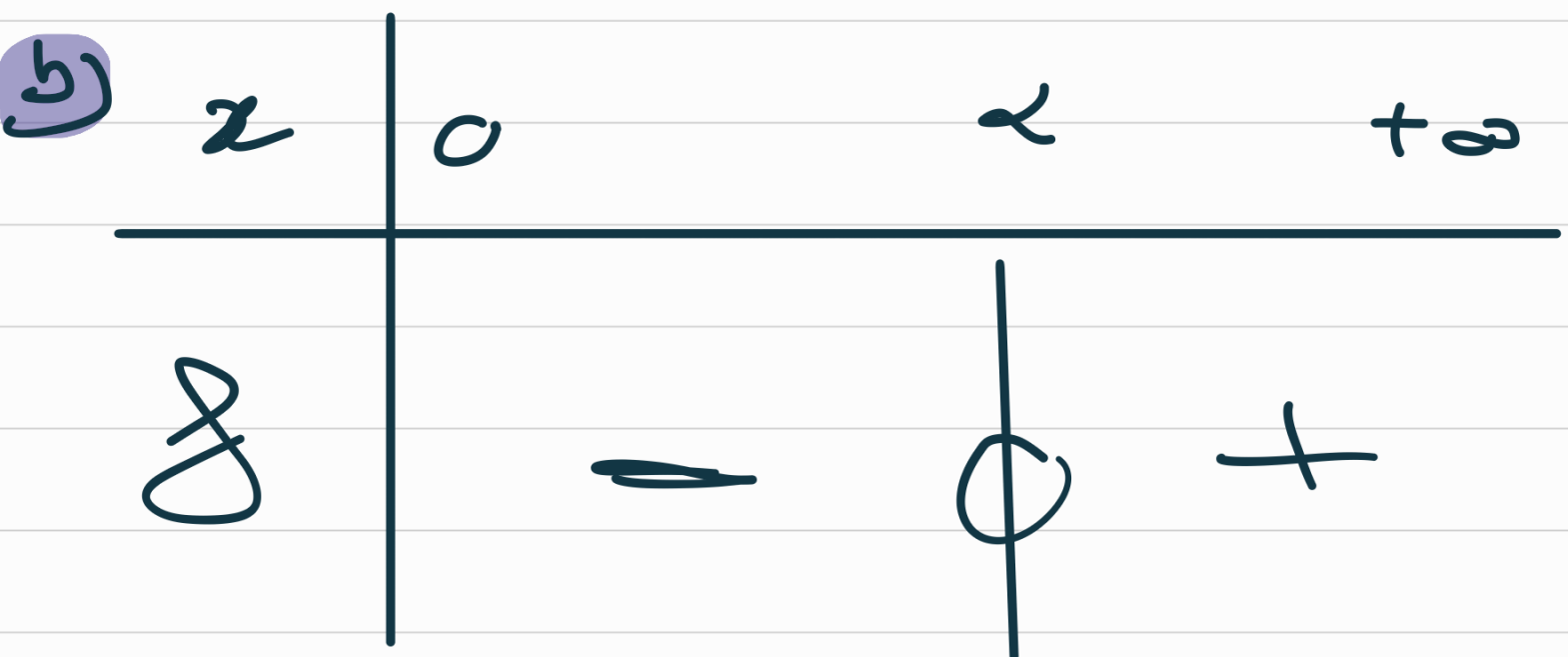
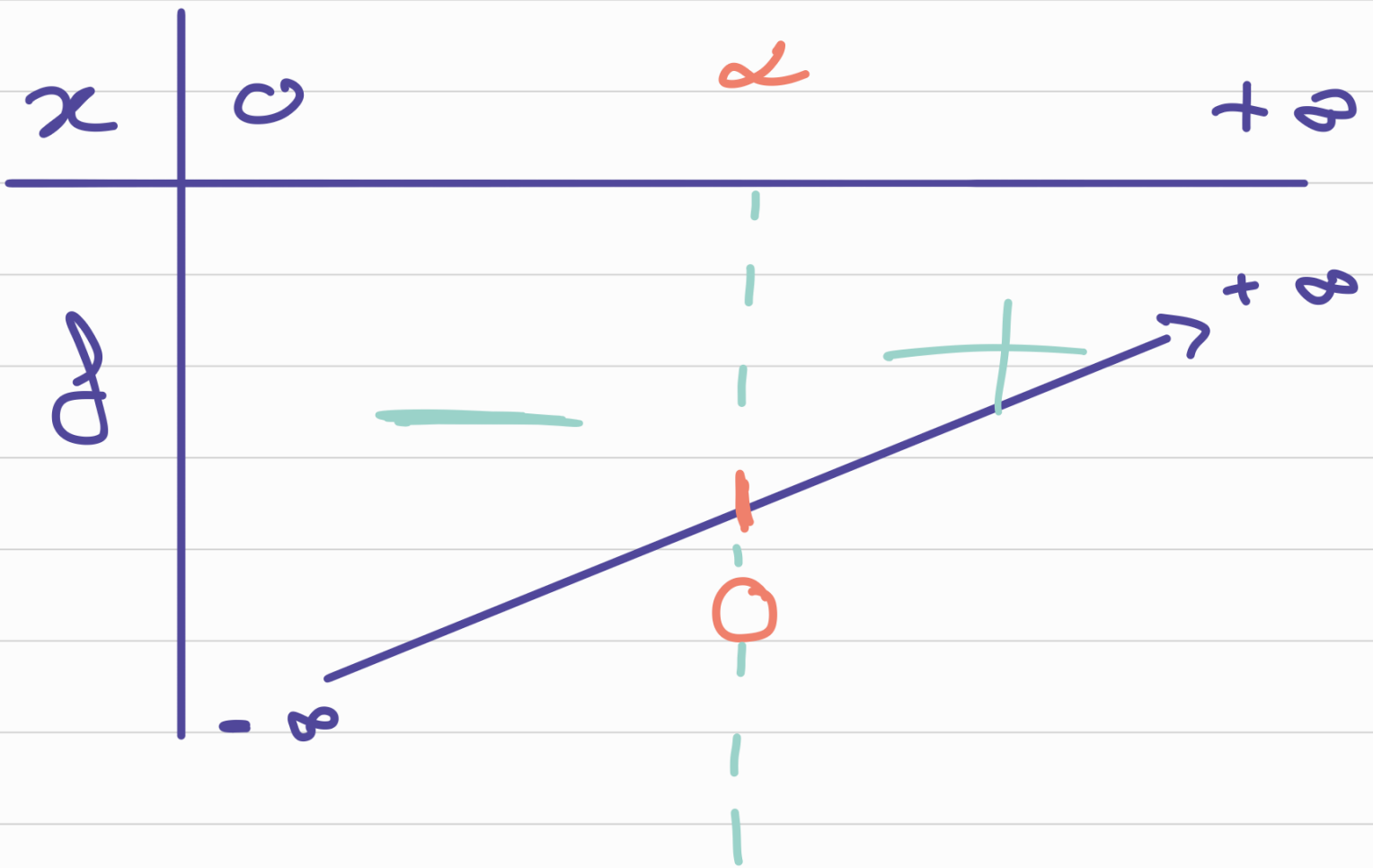
- 2) a. • f est continue sur $]0; +\infty[$
- f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty < 0$
- et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.

De plus, $f(1) = -1 < 0$

et $f(2) = \frac{1}{2} \ln(2) > 0$

donc $\alpha \in [1; 2]$



c) $f(x) = 0$

$$\Rightarrow x - 2 + \frac{1}{2}P_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P_n(x) = 2 - x$$

$$\Rightarrow P_n(x) = 2(2 - x)$$

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

$$\ln(u)' = \frac{u'}{u}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2 \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$1) a) f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$b) f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$2) x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x - \ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x - \left[\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= x - \ln\left(x^2 \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x - \ln\left(x^2 + \overset{=1}{\frac{x^2}{x^2}}\right)$$

$$= x - \ln(x^2 + 1)$$

$$= f(x).$$

$$3) f(x) = x - 2\ln|x| - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
Python
1 from math import log as ln
2 #permet d'utiliser la fonction ln
3 #Le Logarithme népérien
4
5 def seuil(h) :
6     n = 0
7     u = 7
8     while ... :
9         n = n+1
10        u = ...
11    return n
```

- b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.