

exercice 1:

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0,9u_n + 250 - 2500 \\ &= 0,9u_n - 2250 \\ &= 0,9 \left(u_n - \frac{2250}{0,9} \right) \\ &= 0,9 (u_n - 2500) \\ &= 0,9 v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2500 = 3000 - 2500 = 500$.

b) (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = 500$.

D'ai $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times (0,9)^n$.

c) $v_n = u_n - 2500$

donc $u_n = v_n + 2500$
 $= 500 \times 0,9^n + 2500$.

3) on considère la propriété $P_n : u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation:

D'une part, $u_0 = 3000$ et $u_1 = 2950$

① autre part, $u_1 \leq u_0$.

donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité: Supposons la propriété vraie pour un certain rang n , c'est-à-dire, $u_{n+1} \leq u_n$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$(u_{n+1} = 0,9u_n + 250)$$

$$\text{on a : } u_{n+1} \leq u_n$$

$$0,9u_{n+1} \leq 0,9u_n$$

$$0,9u_{n+1} + 250 \leq 0,9u_n + 250$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence on a démontré que : $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est décroissante.

exercice 2:

1) $u_1 = \frac{1}{2}$

$$u_2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{8}$$

2) $u_n = \frac{1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

3) On considère la propriété
 $P_n : "u_n = \frac{1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*" .$

Initialisation:

D'une part, $u_1 = \frac{1}{2}$

D'autre part, $u_1 = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

donc la propriété est vraie au rang $n=0$

Hérédité: Supposons la propriété vraie pour un certain rang n ,
C'est-à-dire $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire
 $u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$.

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{2n}(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n+2}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=1$, et est héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de

réurrence on a démontré que :

$$u_n = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$