

Worksheet 1

exercice 1:

6) $\int_0^{+\infty} \frac{P_n(1+t)}{t(1+t^2)} dt.$

$t \mapsto \frac{P_n(1+t)}{t(1+t^2)}$ est continue
sur $]0; +\infty[$.

$\rightarrow \underline{en + \infty}$: $t(1+t^2) \underset{+\infty}{\sim} t^3$

et $P_n(1+t) \underset{+\infty}{\sim} P_n(t)$

d'où : $\frac{P_n(1+t)}{t(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{P_n(t)}{t^3}.$

$$\alpha \quad P_n(t) = o_+(t)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{P_n(t)}{t^3} = o_+\left(\frac{t}{t^3}\right)$$

$$= o_+\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ par Riemann, et par comparaison, $t \mapsto \frac{P_n(1+t)}{t(1+t^2)}$ est intégrable en $+\infty$.

$$\rightarrow \underline{\text{en } 0} : P_n(1+t) \sim_0 t$$

$$\text{d'où} \quad \frac{P_n(1+t)}{t(1+t^2)} \sim_0 \frac{t}{t(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

$\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue

sur $[0; 1]$, donc elle est intégrable en 0.

D'après par comparaison, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)}$ est intégrable en 0.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} dt$ est absolument convergente, et donc convergente.

8) $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos(t)}$

$t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est continue
sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

→ en $\frac{\pi}{2}$:

$\cos(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

$\sim_{\pi/2} \frac{\pi}{2} - t$

(Note: A green 'X' is drawn above the expression, and a red bracket indicates the limit $t \rightarrow \pi/2$.)

donc $\frac{1}{\cos(t)} \sim_{\pi/2} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$

$\propto \int_0^A \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} dt = \left[-\ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right]_0^A$

$$= -\ln\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - A}\right) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\pi/2}{\frac{\pi}{2} - A}\right)$$

$$\frac{\quad}{A \rightarrow \frac{\pi}{2}} > +\infty.$$

donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} dt$ DV.

D'ici par comparaison,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos(t)} \quad \text{DV.}$$

exercice 4:

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$

$$= \frac{1/2}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1/2}{x+3}$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \int_0^A \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1/2}{x+3} \right) dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{1}{x+1} dx$$

$$- \int_0^A \frac{1}{x+2} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(x+1) \right]_0^A - \left[\ln(x+2) \right]_0^A$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\ln(x+3) \right]_0^A$$

$$= \frac{1}{2} \ln(A+1) - \ln(A+2) + \ln(2)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\ln(A+3) - \ln(3) \right)$$

$$= \ln(\sqrt{A+1}) - \ln(A+2) \\ + \ln(\sqrt{A+3}) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{A+1}\sqrt{A+3}}{A+2}\right) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\approx \frac{\sqrt{(A+1)(A+3)}}{A+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{A^2}}{A}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{A} = 1$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln(1) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ est continue
sur $[0; +\infty[$.

$\rightarrow$ $e \rightarrow +\infty$: $e^x + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x$

donc $\frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e^x}} = e^{-x/2}$

or $x \mapsto e^{-x/2}$ intégrable
en $+\infty$ car $e^{-x/2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par
croissance comparée

Donc par comparaison,

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ est intégrable
en $+\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$ cv.

on pose $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln(u)$
 $\downarrow$
 $dx = \frac{du}{u}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u+1}} \times \frac{du}{u}$$

on pose $\epsilon = \sqrt{u+1}$

$$\Leftrightarrow u = \epsilon^2 - 1$$

$$\hookrightarrow du = 2\epsilon d\epsilon$$

$$\int_1^A \frac{1}{u\sqrt{u+1}} = \int_{\sqrt{2}}^A \frac{1}{\epsilon^2-1} \times \frac{1}{\cancel{\epsilon}} \times 2\epsilon d\epsilon$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon^2-1} d\epsilon$$

$$\text{car } \frac{1}{\epsilon^2-1} = \frac{1}{(\epsilon+1)(\epsilon-1)} = \frac{a}{\epsilon+1} + \frac{b}{\epsilon-1}$$

$$= \frac{-1/2}{\epsilon+1} + \frac{1/2}{\epsilon-1}$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^A \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^A \frac{1}{t-1} dt \right]$$

$$= - \left[P_n(t+1) \right]_{\sqrt{2}}^A + \left[P_n(t-1) \right]_{\sqrt{2}}^A$$

$$= -P_n(A+1) + P_n(\sqrt{2}+1) + P_n(A-1) - P_n(\sqrt{2}-1)$$

$$= P_n\left(\frac{A-1}{A+1}\right) + P_n\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow \infty} P_n\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$\begin{matrix} \sim 1 \\ + \infty \end{matrix}$

$$= P_n\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{2-1}\right)$$

$$= P_n((\sqrt{2}+1)^2) = 2 P_n(\sqrt{2}+1)$$