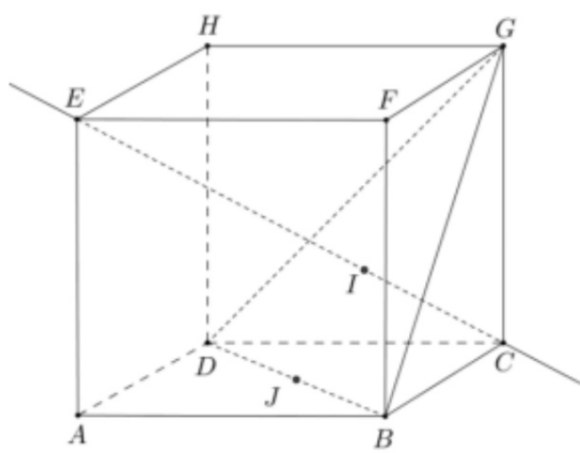


Exercice 4 5 points

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.



On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC) .

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD) .
4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est : $x + y - z - 1 = 0$.
b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- c.** En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.
b. Calculer l'aire du triangle BDG . On pourra utiliser le point J , milieu du segment $[BD]$.

$$1) E(0; 0; 1) \\ C(1; 1; 0) \\ G(1; 1; 1).$$

$$2) \vec{EC}(1; 1; -1)$$

$$\begin{cases} x = \epsilon \\ y = \epsilon \\ z = 1 - \epsilon \end{cases}, \quad \underline{\underline{\epsilon \in \mathbb{R}}}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \epsilon \\ y = 1 + \epsilon \\ z = -\epsilon \end{cases}, \quad \underline{\underline{\epsilon \in \mathbb{R}}}$$

• montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

→ $(\vec{AB}, \vec{AC})$ directeurs de (P)

→ $\vec{u}$ directeur de (d)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

3) $\vec{GB}(0; -1; -1)$

$\vec{GD}(-1; 0; -1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car ils n'ont pas la même coordonnée nulle

$$\vec{GB} \cdot \vec{EC} = 0$$

$$\vec{GD} \cdot \vec{EC} = 0$$

donc le vecteur $\vec{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Donc (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4) a) Comme (EC) est orthogonale au plan (GBD), alors le vecteur $\vec{EC}$ est un normal du plan (GBD).

$$x + y - z + d = 0$$

$$\text{or } D \in (G \cap D)$$

$$1 + 0 - 0 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -1$$

donc une équation cartésienne
du plan $(G \cap D)$ est:

$$x + y - z - 1 = 0$$

$$b) \quad t + t - (1 - t) - 1 = 0$$

$$3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{2}{3}.$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}$$

$$z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

donc les coordonnées de I
intersection du plan (GBD) et
de la droite (EC) sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

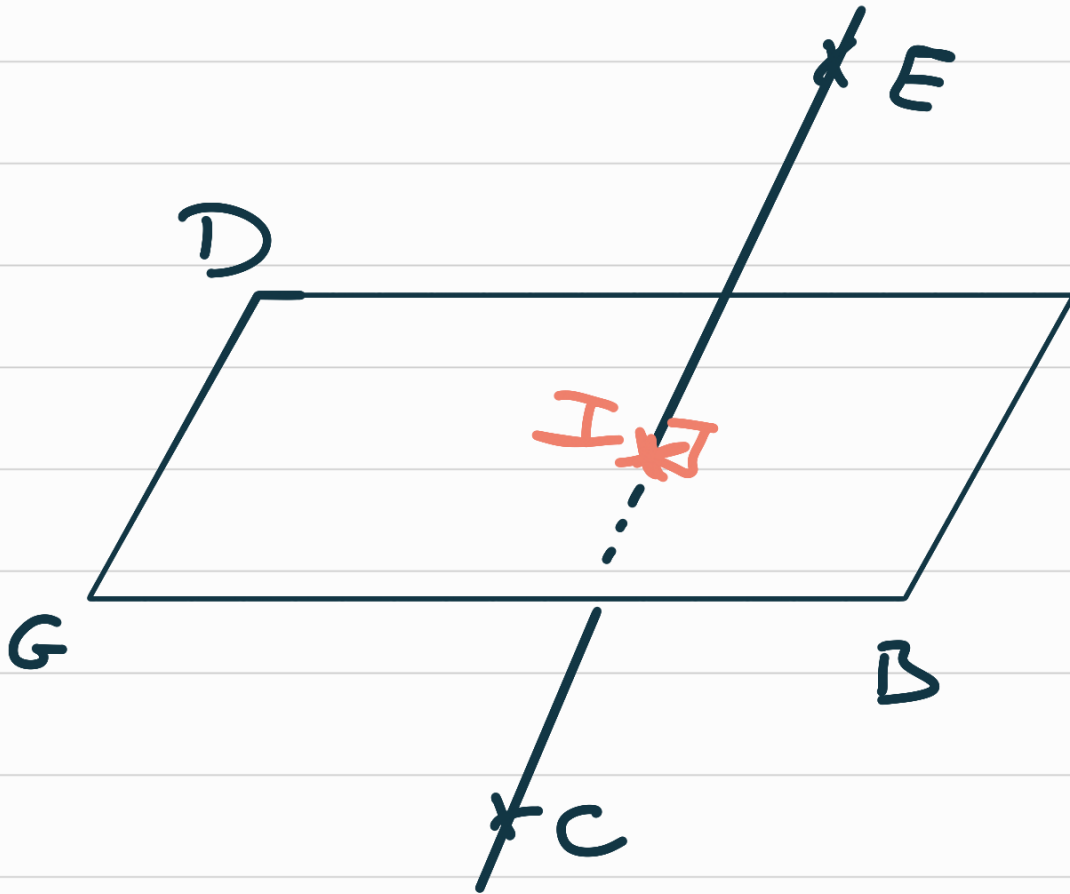
méthode: montrer qu'un point H
est un projeté orthogonal d'un point
A sur un plan (P).

$$\rightarrow H \in (P)$$

$$\rightarrow (AH) \perp (P).$$

c) $\rightarrow$ La droite (EC) est orthogonale au plan (GBD)

$\rightarrow$ I est le point d'intersection de (EC) et (GBD)



Donc I est le projeté orthogonal de E sur le plan (GBD) , et donc la distance de E au plan (GBD) :

$$EI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}$$

$$EI = \frac{2\sqrt{3}}{3} .$$

Continuité

$$\bullet f(x) = \begin{cases} 6x + 8 & x \leq -1 \\ -3x + 7 & -1 < x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Est-ce que la fonction f est continue en -1 ?

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 6x + 8$$

$$= 6(-1) + 8$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} -3x + 7 \\
 &= -3(-1) + 7 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Alors la fonction n'est pas continue en -1 .

Est ce que la fonction est continue en 2 ?

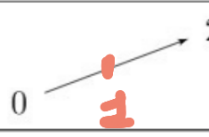
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -3x + 7 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{6}{3 + 2e^{-2x}}$.

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variation de f ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0	2



3. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer un encadrement de α à 0,01 près.

- 3)
- f continue sur $\mathbb{R}$
 - f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 < 1$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 > 1$

donc d'après le corollaire
du théorème des valeurs
intermédiaires l'équation $f(x) = 1$
admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 On considère une fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
g	$-\infty$	10	4	20

On rappelle qu'une flèche montante ou descendante dans ce tableau signifie la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

1. Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation $g(x) = 0$. On justifiera soigneusement.
2. Dresser le tableau de signe de $g(x)$.

~