Exercice 3 **(4 points)**

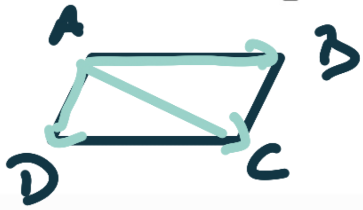
$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 \right)$

2. Calculer en développant : $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$.

3. En déduire BD.



1)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - 4^2 - 5^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7^2 - 16 - 25 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(49 - 16 - 25 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8$$

$$= 4$$

2) $(\vec{AD} - \vec{AB})^2$

$= \vec{AD}^2 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2$

$= AD^2 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} + AB^2$

$= 5^2 - 2 \times 4 + 4^2$

$= 25 - 8 + 16$

$= 33.$

3) $\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{BA}$

$= \vec{BA} + \vec{AD}$

$= \vec{BD}$

donc $(\vec{AD} - \vec{AB})^2 = \vec{BD}^2$

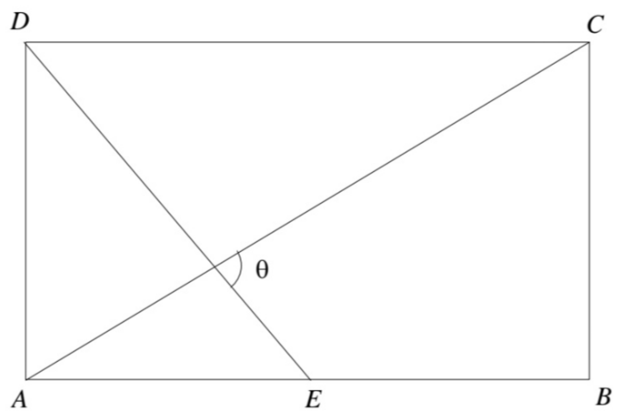
donc $BD^2 = 33$, et

$BD = \sqrt{33}$.

<u>Exercice 1</u> (8 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.

E est le milieu de $[AB]$.



1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{DE}$ en fonction des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$, calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle orienté $\theta = (\vec{DE}\,;\vec{AC})$ arrondie à 0,01 degré près.

1) $AC = \sqrt{34}$

$DE = \sqrt{15,25}$

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=0} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$+ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}$$

$$= -\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= -9 + \frac{1}{2}\times 25$$

$$= -9 + 12{,}5 = 3{,}5.$$

3) $\vec{AC} \cdot \vec{DE} = AC \times DE \times \cos(\vec{AC}, \vec{DE})$

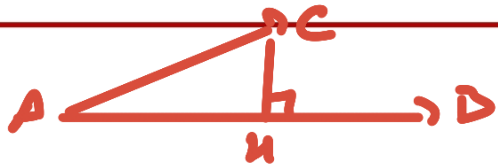
$$3{,}5 = \sqrt{34} \times \sqrt{15{,}25} \times \cos(\vec{AC}, \vec{DE})$$

donc $\cos(\vec{AC}, \vec{DE}) = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{34} \times \sqrt{15{,}25}}$

et $\arccos\left(\dfrac{3{,}5}{\sqrt{34} \times \sqrt{15{,}25}}\right) \simeq 81°$.

EXERCICE 2

Produits scalaires (2 points)

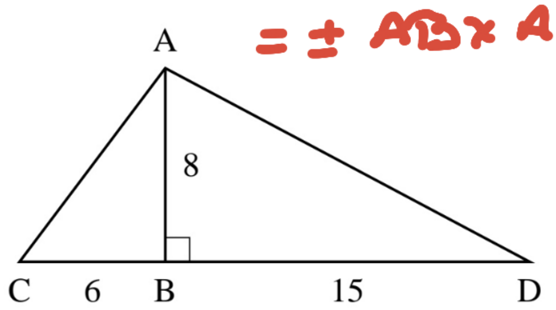


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
$= \pm AB \times AH$

On donne la figure suivante :

À l'aide des information portées sur la figure, déterminer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$
2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}$
3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$
4) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$



1) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DB}$

$= DB^2 = 225.$

2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}$

$= BA^2 = 64$

3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} = -BC^2 = -36$

4) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DB}$

$= - CB \times DB$

$= -6 \times 15$

$= -90$.

exercice :

$A(1;3)$ $B(3;1)$

$C(-2;-2)$

1) Les droites (AC) et (AB) sont perpendiculaires ?

$\vec{AC}(-3;-5)$

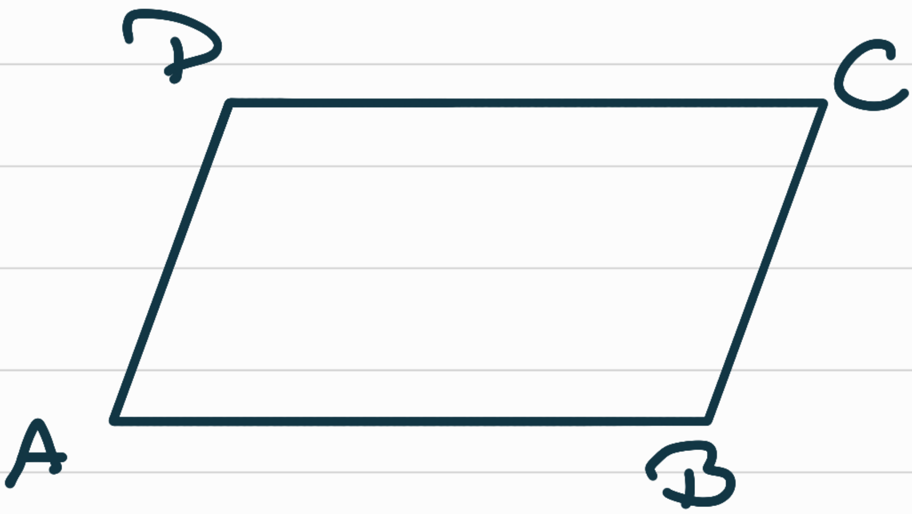
$\vec{AB}(2;-2)$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = -3 \times 2 + -5 \times -2$

$= -6 + 10 = 4 \neq 0$

donc les vecteurs ne sont pas

orthogonaux et donc les droites ne sont pas perpendiculaires.



ABCD parallélogramme

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

I milieu de $[AB]$.

$\Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{IB}$.