

Produit scalaire

Exercice 3 (4 points)

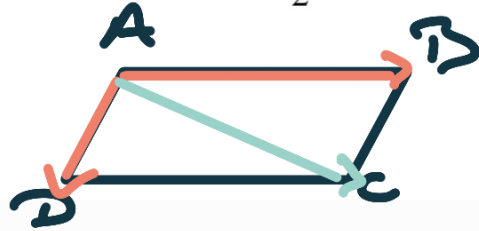
ABCD est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

2. Calculer en développant : $(\vec{AD} - \vec{AB})^2$.

3. En déduire BD .



$$1) \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB} + \vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - AD^2)$$

$$= \frac{1}{2} (7^2 - 4^2 - 5^2)$$

$$= 4$$

$$2) \|\vec{AD} - \vec{AB}\|^2$$

$$= \|\vec{AD}\|^2 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2$$

$$= 25 - 2 \times 4 + 16$$

$$= 33.$$

$$3) \|\vec{AD} - \vec{AB}\|$$

$$= \|\vec{AD} + \vec{BA}\|$$

$$= \|\vec{BA} + \vec{AD}\|$$

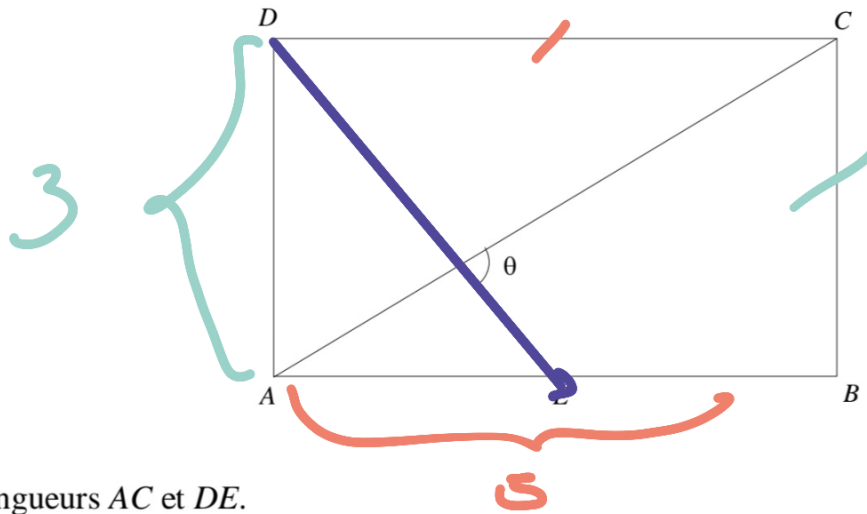
$$= \|\vec{BD}\|$$

$$\text{donc } BD = \sqrt{33}$$

Exercice 1 (8 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.

E est le milieu de $[AB]$.



1. Calculer les longueurs AC et DE .

2. En exprimant chacun des vecteurs \vec{AC} et \vec{DE} en fonction des deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} , calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DE}$.

3. En déduire la valeur de l'angle orienté $\theta = (\vec{DE}; \vec{AC})$ arrondie à 0,01 degré près.

$$1) \quad AC^2 = AB^2 + DA^2, \text{ Pythagore}$$

$$= 5^2 + 3^2$$

$$= 34$$

$$\text{donc } AC = \sqrt{34}.$$

$$\begin{aligned} DE^2 &= AE^2 + AD^2 \\ &= 2,5^2 + 3^2 \\ &= 15,25 \end{aligned}$$

donc $DE = \sqrt{15,25}$.

2) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
 $= \vec{AB} + \vec{AD}$

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \vec{DA} + \vec{AE} \\ &= -\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} \end{aligned}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DE}$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (-\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB})$$

$$= \vec{AB} \cdot -\vec{AD} + \vec{AB} \cdot \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} \cdot -\vec{AD} + \vec{AD} \cdot \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 5^2 - 3^2$$

$$= 3,5$$

$$3) \vec{AC} \cdot \vec{DE} = 3,5$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DE} = AC \times DE \times \cos(\vec{DE}, \vec{AC})$$

$$3,5 = \sqrt{34} \times \sqrt{15,25} \times \cos(\vec{DE}, \vec{AC})$$

$$\text{obnc } \cos(\vec{DE}, \vec{AC}) = \frac{3,5}{\sqrt{34} \times \sqrt{15,25}}$$

$$\theta = (\vec{DE}, \vec{AC}) = \arccos\left(\frac{3,5}{\sqrt{34} \times \sqrt{15,25}}\right) \\ \approx 81^\circ$$

exercice:

$$A(3; 3) \quad B(0; -1)$$

$$C(2, 1)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} \quad \vec{AB}(-3; -4)$$

$$\vec{AC}(-1; -2)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = -1 \times -3 + -2 \times -4$$

$$= 3 + 8 = 11.$$