Produit Scalaire

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC =3 et $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$= 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 15 \times -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\|\vec{v}\|$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$7 = 2 \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$7 = \cancel{2} \times \|\vec{v}\| \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

donc $\|\vec{v}\| = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

Exercice 3

Soit M(1;3), N(4; -2) et P(2; -1) trois points dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ en degrés à 0,1 prés.

1) $\overrightarrow{MN}(3\,;-5)$

$\overrightarrow{MP}(1\,;-4)$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 1\times 3 + (-5)\times(-4)$

$= 3 + 20$

$= 23.$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2) $MN = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$

$MP = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = MN \times MP \times \cos(\widehat{NMP})$

$23 = \sqrt{34} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{NMP})$

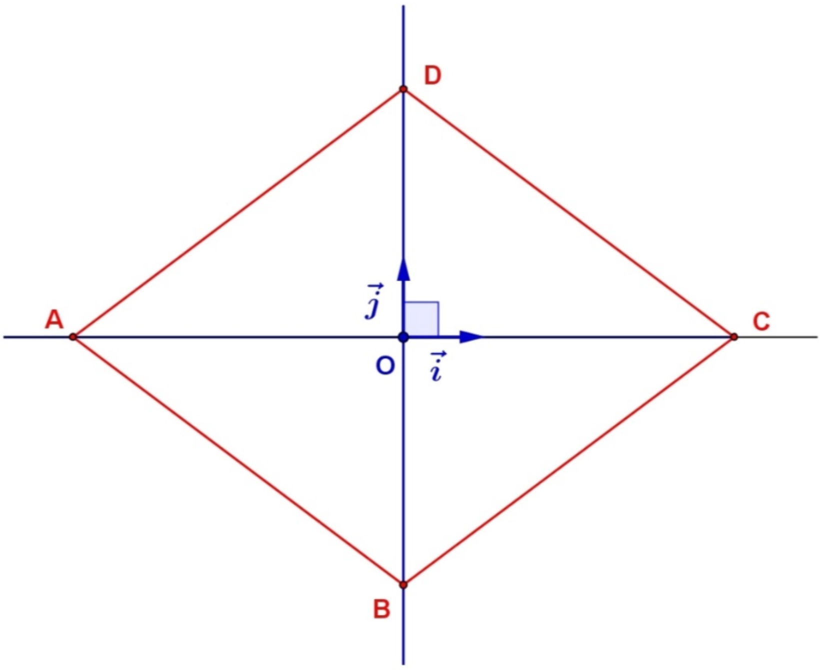
$\dfrac{23}{\sqrt{34} \times \sqrt{17}} = \cos(\widehat{NMP})$

donc $\widehat{NMP} = \arccos\left(\dfrac{23}{\sqrt{34} \times \sqrt{17}}\right)$

$\simeq 16{,}9°$.

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



1.Calculer les produits scalaires suivants:

a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ d. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

2. En utilisant les coordonnées des points dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, calculer:

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$.

1) a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$

$= AC \times AO \times 1$

$= 8 \times 4 \times 1$

$= 32$

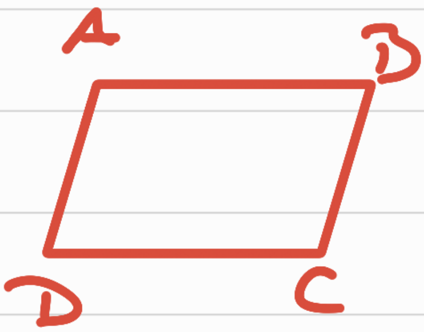
b) $\vec{BO} \cdot \vec{DC}$

$= BO \times BO \times 1$

$= 3 \times 3 \times 1$

$= 9.$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$



↳ $\vec{AB} = \vec{DC}$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

$= AB \times AB$

$= 5 \times 5$

$= 25.$

d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD}$

$= BO \times BD \times 1$

$= 3 \times 6$

$= 18.$

Exercice 6

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer:

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b. $\vec{u}^{\,2}$ c. $(4\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ d. $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 1 + (-1)\times 4 = -2.$

b) $\vec{u}^{\,2} = 2^2 + (-1)^2 = 5.$

c) $(4\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

$4\vec{u}\cdot\vec{u}$ $\vec{v}\cdot\vec{v}$

$= 4\vec{u}^{\,2} - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^{\,2}$

$= 4\vec{u}^{\,2} - 3\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}^{\,2}$

$= 4\times 5 - 3\times -2 - (1^2+4^2)$

$= 20 + 6 - 17$

$= 9$

d) $(\vec{u}+2\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})$

$= 2\vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + 2\vec{v}.2\vec{u}$

$- 2\vec{v}.\vec{v}$

$= 2\vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + 4\vec{u}.\vec{v}$

$- 2\vec{v}^2$

$= 2\vec{u}^2 + 3\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{v}^2$

$= 2\times 5 + 3\times -2 - 2\times 17$

$= -30$