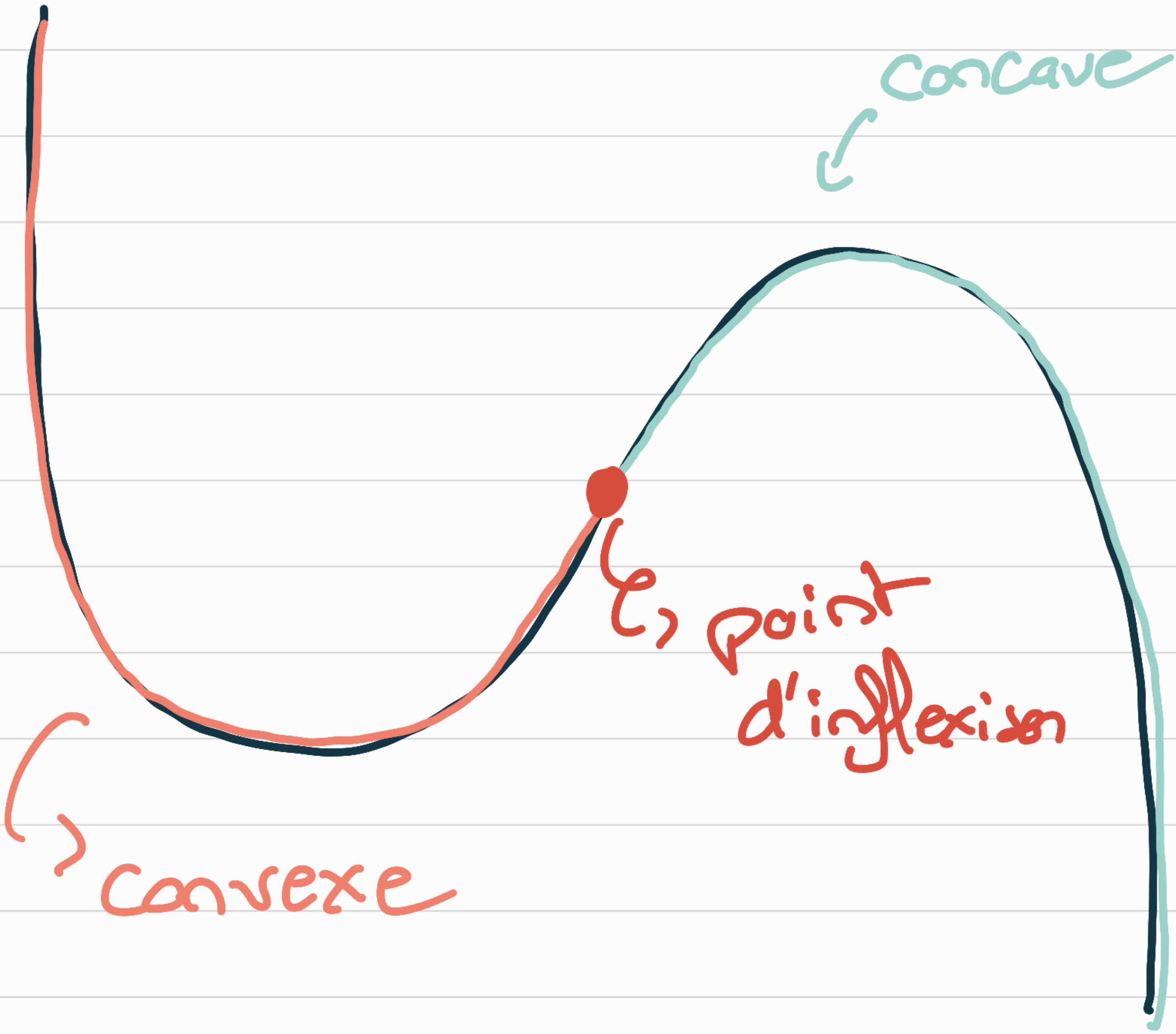
Convexité



- on peut redériver la fonction dérivée et on obtient la fonction dérivée seconde.

$$(f')' = f''$$

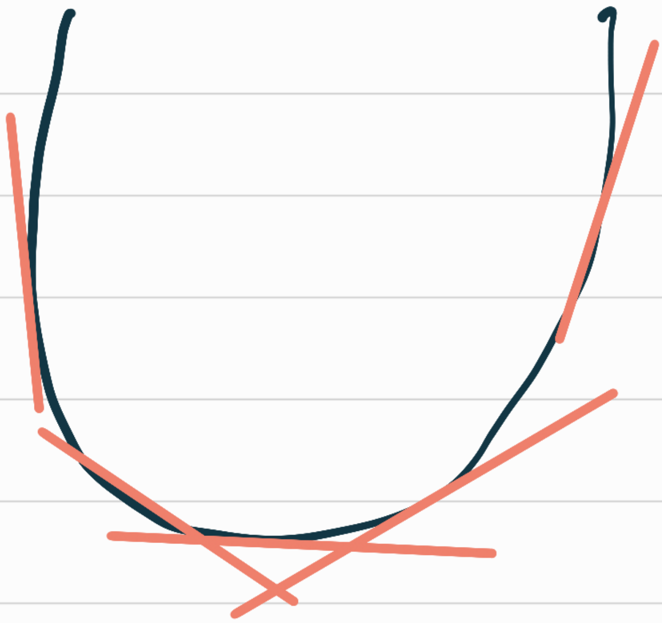
- $f'' \geqslant 0 \iff f$ convexe

  $f'' \leqslant 0 \iff f$ concave

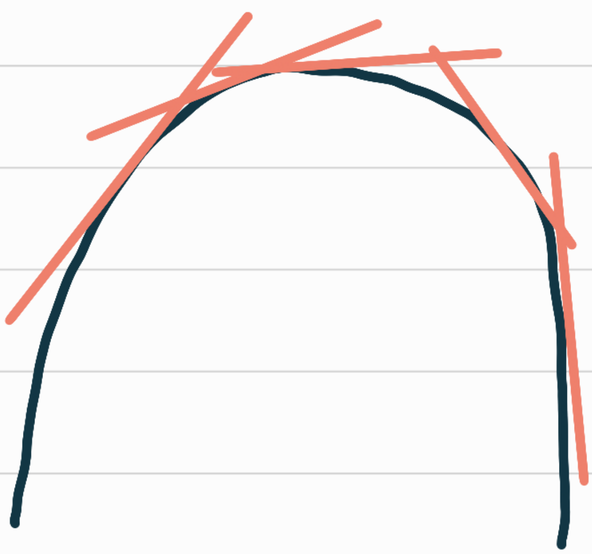
- f' croissante $\iff f$ convexe

  f' décroissante $\iff f$ concave.

. si f est convexe, alors toutes ses tangentes sont au dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$

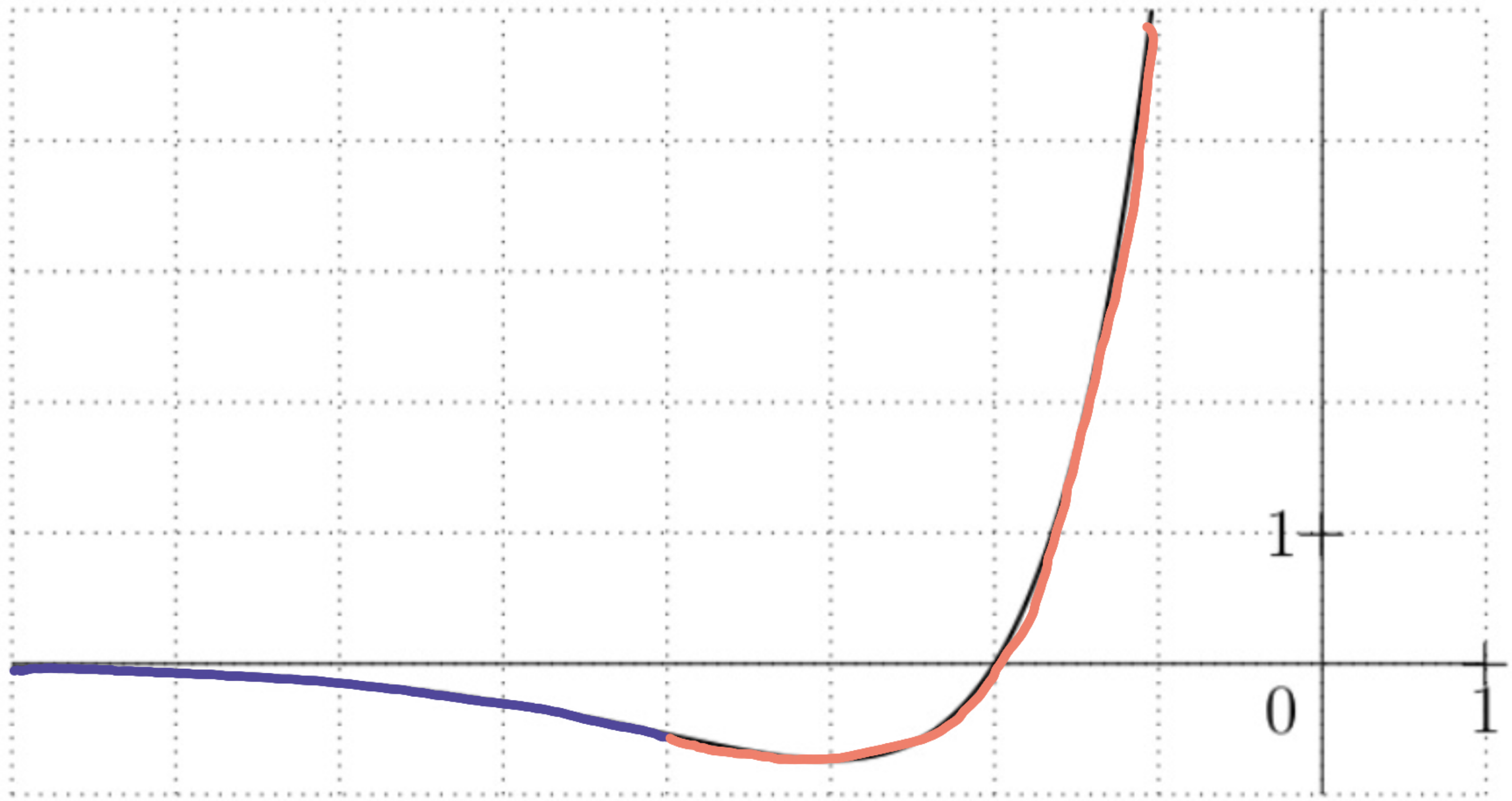


. si f est concave, alors toutes ses tangentes sont au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.



Détermination Convexité 1

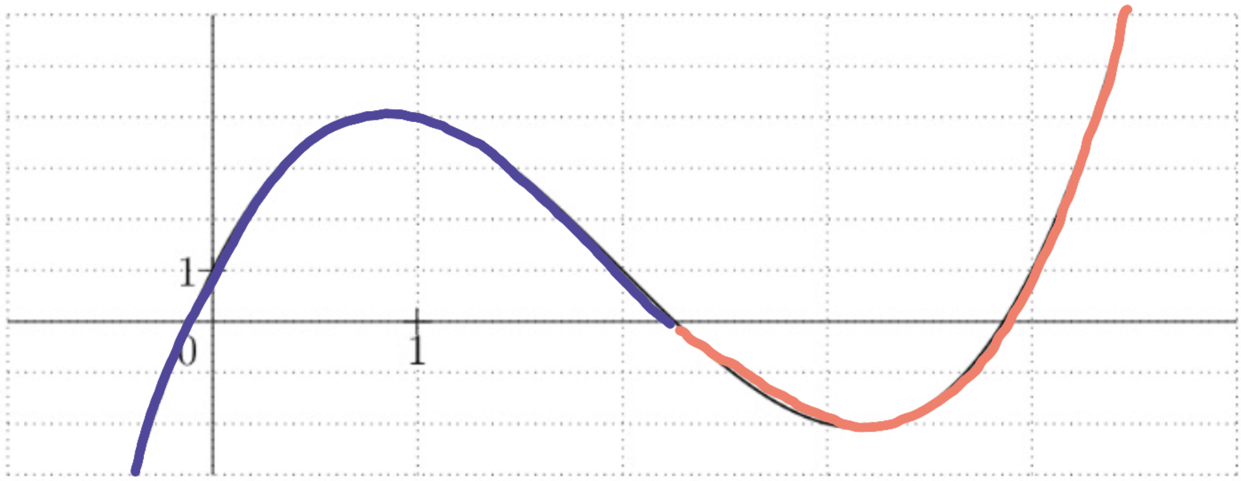
exercice 1 :



f concave sur $]-\infty ; -4]$

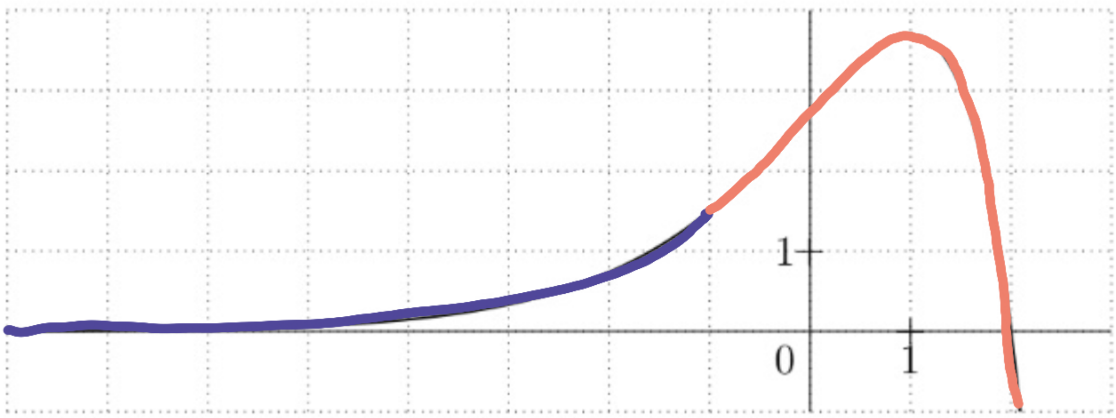
f convexe sur $[-4 ; +\infty[$.

2. Même question.



- f concave sur $]-\infty ; 2,3]$
- f convexe sur $[2,3 ; +\infty[$.

3. Même question.



f convexe sur $]-\infty ; -1]$

f concave sur $[-1 ; +\infty[$.

Exercice 2 Étudier la convexité de chacune des fonctions ci-dessous.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 5x + 3$

2. g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 5x + e^x$.

4. a définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

5. b définie sur $\mathbb{R}$ par $b(x) = 2x^2 - e^{2x}$.

6. c définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $c(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$.

1) $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 5x + 3$

$\hookrightarrow f'(x) = 18x^5 + 8x^3 - 5$

$\hookrightarrow f''(x) = 90x^4 + 24x^2 \geqslant 0$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = \sqrt{x}$.

↳ g est concave sur $\mathbb{R}_+$

3) $h(x) = x^2 - 5x + e^x$

↳ $h'(x) = 2x - 5 + e^x$

↳ $h''(x) = 2 + e^x > 0$

donc h est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

4) $a(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

$a'(x) = 15x^2 - 6x + 6$

$a''(x) = 30x - 6.$

x	$-\infty$		$1/5$		$+\infty$
signe a''		$-$	0	$+$	

donc a est concave sur $]-\infty ; \frac{1}{5}]$ et a est convexe sur $[\frac{1}{5} ; +\infty[$.

5) $f(x) = 2x^2 - e^{2x}$ $\quad (e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = 4x - 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4 - 4e^{2x}$$

$$4 - 4e^{2x} \geq 0$$

$$-4e^{2x} \geq -4$$

$$e^{2x} \leq \frac{-4}{-4} = 1$$

$$e^{2x} \leq 1$$

$$2x \leq \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe f''		$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty;0]$
et f est concave sur $[0;+\infty[$.

6) $c(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$

↳

$$c'(x) = \frac{3(2x-4) - 2(3x+1)}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{-14}{(2x-4)^2}$$

$-14 \times \dfrac{1}{(2x-4)^2}$

↳ u^2

$$((2x-4)^2)' = 2\times(2x-4)\times 2$$

$$(u^2)' = 2u\times u' \quad = 4(2x-4)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad = 8x-16$$

$$c'' = -14x - \frac{(8x-16)}{((2x-4)^2)^2}$$

$$= \frac{112x-224}{(2x-4)^4 > 0}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe c''	concave $-$	$\|\|$	$+$ convexe.