Analyse Fonctions

exercice :

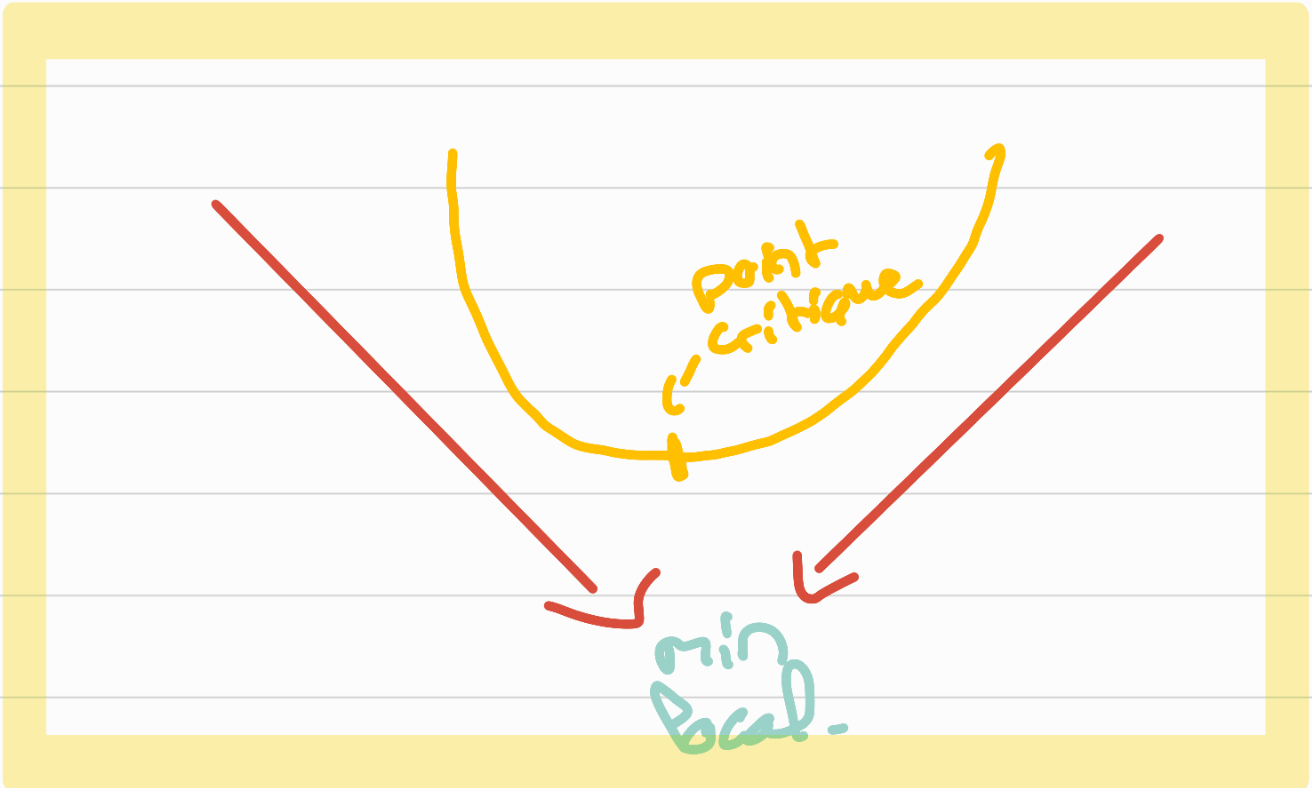
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

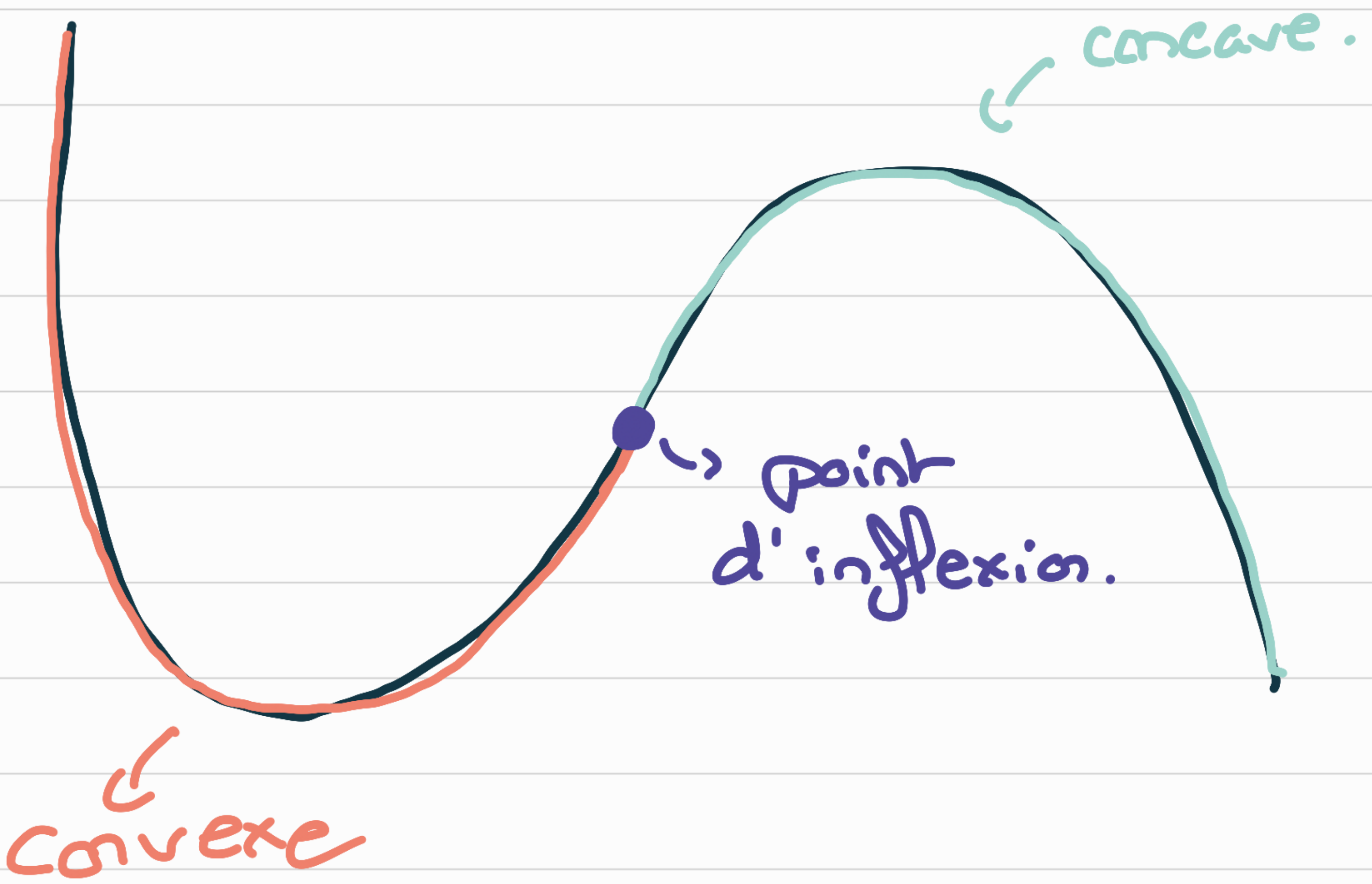
- $f'(x) = 3 \times 2x - 2 = 6x - 2$

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ point critique

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1/3) = 2/3$	$\nearrow$	

f admet un minimum local en $x = \frac{1}{3}$ et qui vaut $\frac{2}{3}$.





<u>dérivée seconde</u> : $(f')' = f''$

- $f'' \geq 0 \iff f$ convexe
- $f'' \leq 0 \iff f$ concave.

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ point d'inflexion.

Exercice 2 Étudier la convexité de chacune des fonctions ci-dessous.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 5x + 3$

2. g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 5x + e^x$.

4. a définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

5. b définie sur $\mathbb{R}$ par $b(x) = 2x^2 - e^{2x}$.

6. c définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $c(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$.

$a'(x) = 15x^2 - 6x + 6$

$a''(x) = 30x - 6.$

x	$-\infty$		$1/5$		$+\infty$
a''		$-$	0	$+$	

donc a est concave sur $]-\infty ; \frac{1}{5}]$ et a est convexe sur $[\frac{1}{5} ; +\infty[$

De plus, $\frac{1}{5}$ est l'abscisse du point d'inflexion.

f paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

f impaire $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Contrôle

exercice :

$$f(x) = x^3 - 3x \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Donner la symetrie du graphe de f.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)$$

$$= -x^3 + 3x$$

$$= -f(x)$$

donc f est impaire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2) Déterminer les zéros de f

$f(x) = 0$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x = +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

donc les zéros de f sont
$0 ; \sqrt{3} ; -\sqrt{3}$.

3) Etudier les variations : calculer dérivée, résoudre $f'(x)=0$ et donner nature extrema.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times -3$$

$$= 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

$$f(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)$$

$$= -1 + 3 = 2$$

$$f(1) = 1^3 - 3\times 1$$

$$= 1 - 3 = -2$$

donc f admet un maximum local de coordonnées $(-1; 2)$ et un minimum local de coordonnées $(1; -2)$.

4) Etudier la convexité : calculer f'', signe f'', et donner le point d'inflexion.

$$f''(x) = 6x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

donc f est concave sur $]-\infty; 0]$

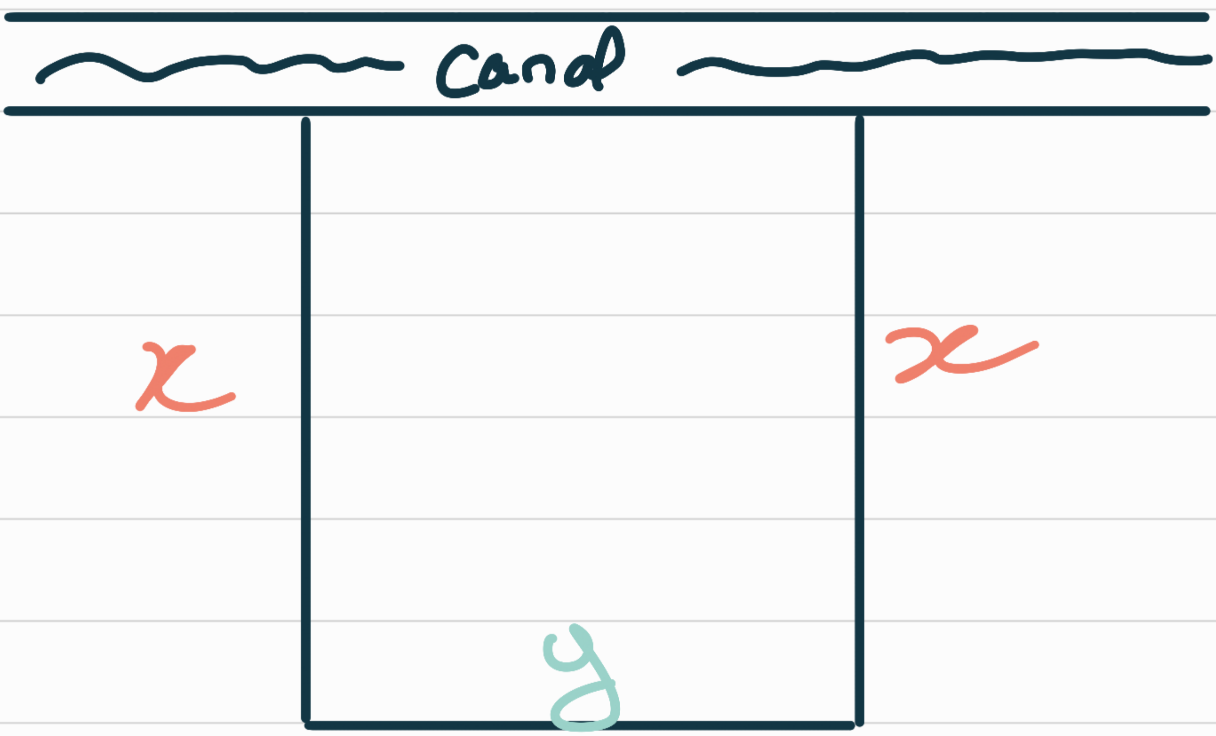
et f est convexe sur $[0;+\infty[$.

De plus, les coordonnées du point d'inflexion sont $(0;0)$

exercice :

Un berger dispose de 200 m de clôture pour délimiter une aire rectangulaire au bord d'un canal. Un côté du rectangle est le canal.

On note x la longueur des deux côtés perpendiculaires au canal en m et y la longueur du côté opposé au canal.



1) Écrire la contrainte entre x et y.

$$x + y + x = 200$$

$$\boxed{2x + y = 200}$$

$\hookrightarrow y = 200 - 2x$

2) Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x et préciser son domaine

$$A(x) = x \times y$$

$$= x(200 - 2x)$$

$$= 200x - 2x^2, \quad x \in [0;100]$$

sq : $y = 200 - 2x \geqslant 0$

$$-2x \geqslant -200$$

$$x \leq \frac{-200}{-2} = 100$$

---

3) Déterminer les dimensions $(x ; y)$ pour que l'aire soit maximale.

$$A'(x) = -4x + 200.$$

x	0		50		100
A'		$+$	0	$-$	
A	0	$\nearrow$	5 000	$\searrow$	0

donc les dimension pour que l'aire soit maximale sont $x = 50$ m et $y = 200 - 2 \times 50$
$= 100$ m.

L'aire maximale est 5000 m^2.

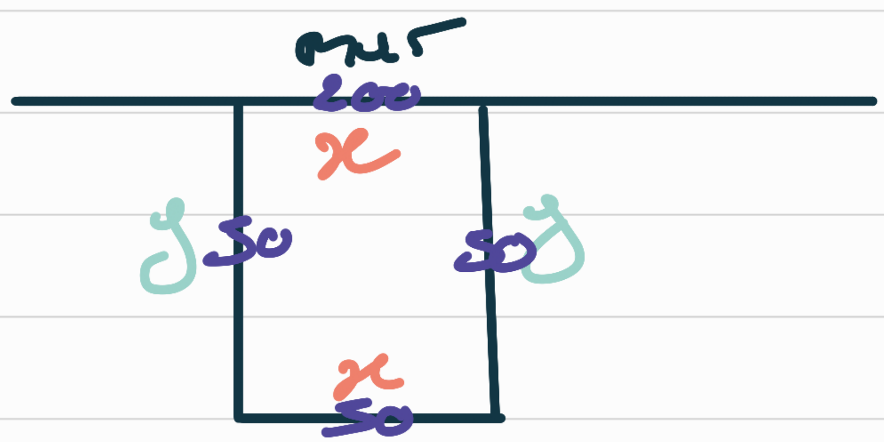
exercice :

On veut construire un enclos rectangulaire d'aire 1 000 m².

Un côté est un mur coûtant 100 €/m, et les les 3 autres côtés sont en grillage coûtant 50 €/m.

On note x la longueur du mur et y l'autre.

1) Écrire la contrainte



$x \times y = 1000$

$\hookrightarrow y = \frac{1000}{x}$

2) Écrire le coût $K(x)$ et préciser son domaine.

$x + y + x + y \rightarrow$ tour

$K(x) = 200x + 50y + 50x + 50y$

$= 250x + 100y$

$= 250x + 100 \times \frac{1000}{x}$

$= 250x + \frac{100\,000}{x}$

domaine : $x \in]0 ; +\infty[$

3) Déterminer les dimensions pour avoir un coût minimal.

$$K'(x) = 250 - \frac{100\,000}{x^2}$$

$$= \frac{250x^2 - 100\,000}{x^2} \quad x^2 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4 \times 250 \times -100\,000$$

$$= 100\,000\,000$$

$$> 0$$

$x_1 = 20$ $\qquad$ $x_2 = -20$

x	$-\infty$		-20		0		20		$+\infty$
		$+$	0	$-$	⋮		0	$+$	

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
x & 0 & & 20 & & +\infty \\
\hline
K' & \| & - & 0 & + & \\
\hline
K & \| & \searrow & & \nearrow & \\
 & \| & & 10\,000 & & \\
 & & & K(20) & &
\end{array}
$$

Les dimensions pour que le coût soit minimale sont $x = 20\,m$ et $y = \frac{1000}{20} = 50\,m$.

Et le coût serait $10\,000$ €.