Devoir - Maison

exercice 1 :

1) $u_n = 1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= v_0 + v_1 + \dots + v_n$

avec (v_n) géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier $v_0 = 1$.

donc $u_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1/4}$$

$$= 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$, et

l'affirmation est fausse.

2) L'instruction suite(50) donnerais u_{49} car la boucle for i in range(50) affiche les nombres de 0 à 49 et non 50.

Donc l'affirmation est fausse.

exercice 3 :

1) **a)** $\vec{AB}(-1\,;\,0\,;\,-6)$

$\vec{AC}(-3\,;\,1\,;\,-10)$

· $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \neq \frac{0}{1} = 0$

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés donc forment un plan.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -1\times6 + 8\times0 + -1\times-6 = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{n} = -3\times6 + 8\times1 + -1\times-10 = 0$

donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

c) comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

Alors $6x + 8y - z + d = 0$.

or $A \in (ABC)$, donc :

$6 \times 1 + 8 \times 1 - 14 + d = 0$

$\Rightarrow \quad d = 0$

donc $\boxed{6x + 8y - z = 0}$

2) a) un vecteur directeur est $\vec{u}\,(2\,;1\,;4)$.

b) $6(2t-3)+8\left(t-\frac{1}{2}\right)-(4t+2)=0$

$12t-18+8t-4-4t-2=0$

$16t-24=0$

$t=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2\times\frac{3}{2}-3=0 \\ y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1 \end{cases} \quad / \; z=4\times\frac{3}{2}+2=8.$

donc la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants au point $B\,(0\,;1\,;8)$.

3) $6(t^3+t)+8(t+1)-2t=0$

$\Leftrightarrow 6t^3+6t+8t+8-2t=0$

$\Leftrightarrow 6t^3+12t+8=0$

$\Leftrightarrow 3t^3+6t+4=0$

on pose $f(t)=3t^3+6t+4$
pour $t\in\mathbb{R}$.

. $f'(t)=9t^2+6>0$

Donc on a que :

f continue sur $\mathbb{R}$.

f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty < 0$$

et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty > 0$.

Donc par le théorème de la bijection l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Ainsi il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).