

21 décembre 2022 - 1h

Exercice 1 (Sujet Calédonie 27 oct 2022 - 10 pts) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Déterminer f' .
b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x = e$.
c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$;
en déduire la position relative de la courbe C_f et de la tangente T .
2. a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
b) Déterminer un encadrement de α au dixième.
c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` désigne la fonction logarithme népérien \ln .

```
def seuil(pas) :
    x=4.3
    while x*log(x) - x - 2 < 0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\begin{aligned}
 1) \quad a) \quad f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\
 &= \ln(x) + 1 - 1 \\
 &= \ln(x).
 \end{aligned}$$

$$b) \quad T_e f : y = f'(e)(x - e) + f(e).$$

$$f'(e) = \ln(e) = 1$$

$$f(e) = e \ln(e) - e - 2$$

$$= e \cdot 1 - e - 2 = -2.$$

donc $y = x - e - 2$

c) $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Donc f est strictement convexe sur $]0; +\infty[$ et la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la tangente T sur $]0; +\infty[$.

2) a). $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$ par
croissances comparées.

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} -x - 2 = -2$$

donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

$$f(x) = x \left(\ln(x) - 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 - \frac{2}{x} = +\infty$$

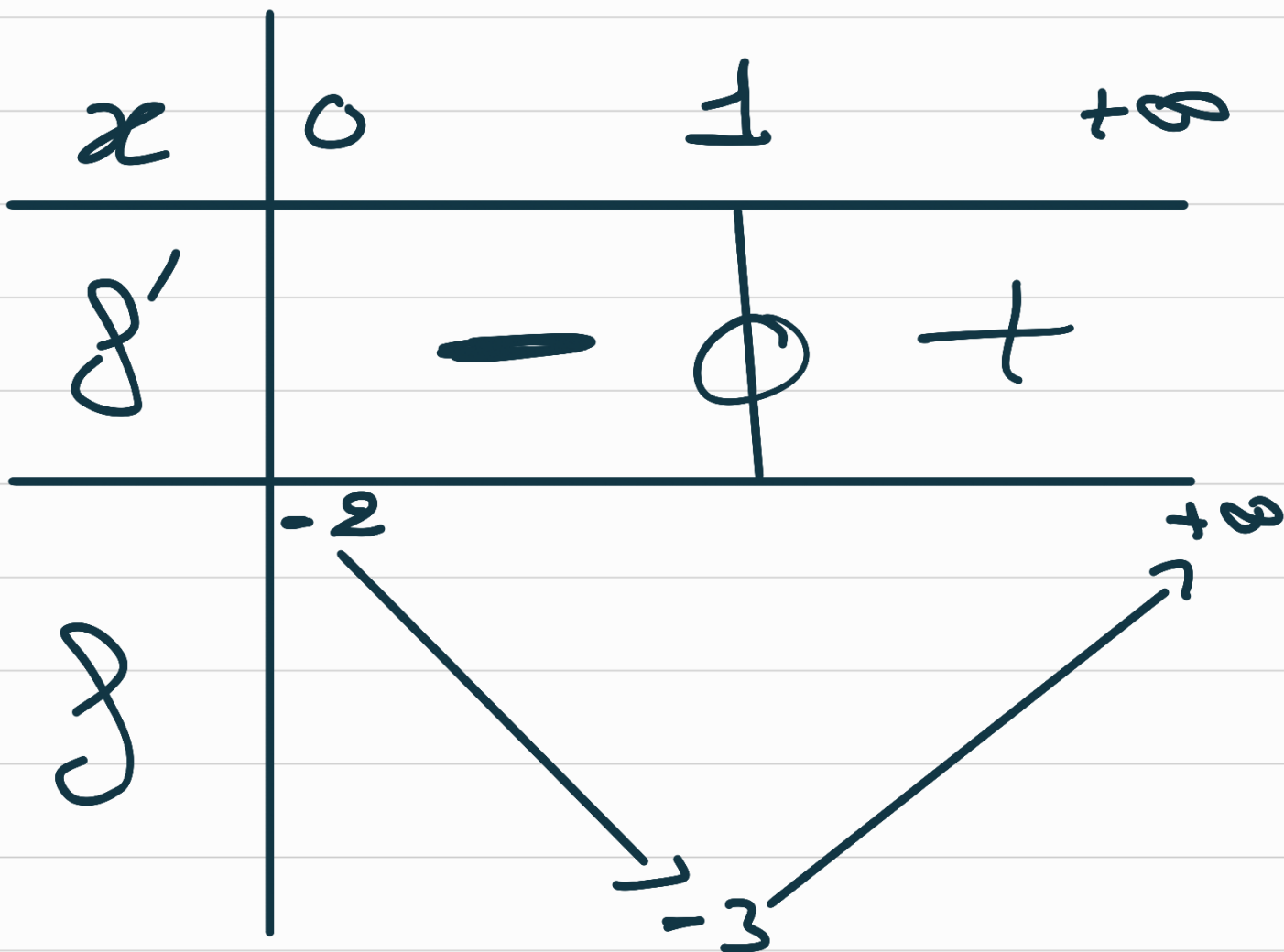
$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Donc par produit de limites,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5) $f'(x) = P_n(x)$



Exercice 2 (Amérique du Nord 19 mai 2022 - Bonus) : Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Chaque réponse est à justifier.

Question 1 : Le réel a défini par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

- a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$ b. $\frac{1}{2}\ln(3)$ c. $3\ln(3) + \frac{1}{2}$ d. $-\frac{1}{2}\ln(3)$

Question 2 : On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x .

- a. 3 est solution de (E) .
b. $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E) .
c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Question 3 : La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- a. Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
b. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0.
d. La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse \sqrt{e} .

1)
$$a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$= \cancel{\ln(9)} + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3)$$
$$- \cancel{\ln(9)}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3)$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(3)$$

$$2) \quad \overbrace{f_n(x)}^{x > 0} + \overbrace{f_n(x-10)}^{x-10 > 0 \Rightarrow x > 10} = f_n(3) + h(7)$$

$$\Leftrightarrow f_n(x(x-10)) = f_n(3 \times 7)$$

$$\Leftrightarrow x(x-10) = 21$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4 \times 1 \times -21$$

$$= 184 > 0$$

donc il y a deux solutions.

EXERCICE 1

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$u(x) = x^2 + 1$ $\frac{u'}{u}$

1) a) $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1}$$
$$= \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

$$b) f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} > 0$$

$$\geq 0$$

donc f est croissante sur \mathbb{R} .

$$3) f(x) = x \left(1 - \frac{2h(x)}{x} - \frac{h\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \right)$$

$\xrightarrow{+0}$ $\xrightarrow{0}$ $\xrightarrow{0}$

$\xrightarrow{1}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.