# Structure algébrique

-> groupe

-> morphisme de groupe

-> sous-groupe

-> permutation

-> anneaux -> morphisme d'anneau.

-> corps

-> théorème restes chinois, Fermat et Euler.

-> idéaux.

Ursula

# Analyse

→ étude de fonctions

→ DLs

→ séries numériques, fonctions et entières.

→ intégrales généralisées

Douai

# Algèbre linéaire

→ diagonalisation.

→ moindre carrée

→ produits / normes

+ Gramm

→ projection orthogonale

→ théorème de l'alternative.

→ isométrie / spectrale.

chiron

# Groupes

un groupe est un ensemble $G$ muni d'une $\underbrace{\text{loi interne } *}_{}$ :

$$\forall x, y \in G, \; x * y \in G$$

→ **associative** : $\forall x, y, z \in G$.

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

→ **neutre** : $\exists e_G \in G, \; \forall x \in G$

$$x * e = x = e * x$$

$$1 + 0 = 1 = 0 + 1$$

→ **inverse** : $\forall x \in G, \; \exists y \in G$

$$2 \times 1/2 = 1 = 1/2 \times 2.$$

$$x * y = e = y * x$$

$\to x^{-1}$

donc $(G, *)$ est un groupe.

**prop :** groupe abélien/commutatif.

$\forall x, y \in (G,*), \ x * y = y * x$

$1 + 2 = 2 + 1$

• **déf :** on dit qu'un sous-ensemble $H$ de $G$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si :

1. $H$ stable par $*$
   ↳ $\forall x, y \in H, \ x * y \in H$

2. $(H, *)$ groupe.

**prop** : $H \subseteq G$ est un sous-groupe de $(G, *)$ ssi

① $e_G \in H$

② $\forall x, y \in H, \quad x * y^{-1} \in H$

$x * y \in H$ $\qquad$ $y^{-1} \in H$

on dit $\boxed{H \leq G}$

**déf** : $x \in G$ est dit générateur si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\langle x \rangle = G$$

$$= \{ e_G ; x, \overbrace{x^2}^{x*x}, \dots, x^k \}$$

$\Rightarrow$ un groupe est cyclique s'il est engendré par un seul élément et il est fini.

**déf** : une application $\varphi : (G, *) \to (H, \diamond)$ est un (homo) morphisme de groupes :

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \ker(\varphi) = \{ x \in G : \varphi(x) = e_H \}$$

$$\Rightarrow \operatorname{im}(\varphi) = \{ y \in H : \exists x \in G, y = \varphi(x) \}$$

**déf** : on dit qu'un morphisme de groupes est :

$\Rightarrow$ injectif si $\ker(\varphi) = e_G$

$\Rightarrow$ surjectif si $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

$\Rightarrow$ bijectif si injectif + surjectif.

**déf :** . $\varphi$ est isomorphisme si c'est un morphisme bijectif.

. $\varphi$ est automorphisme si c'est un morphisme bijectif et qui va de $(G, *) \longrightarrow (G, *)$.

---

**déf :** on note $o(x)$, l'ordre de $x$ dans $G$, l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k = \underbrace{x * \cdots * x}_{k \text{ fois}} = e_G$.

<u>déf</u> : l'ordre d'un groupe est son cardinal en tant qu'ensemble.