

Exercice 1 (5 points)

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans cet exercice, on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours d'un week-end. Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours. On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les évènements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

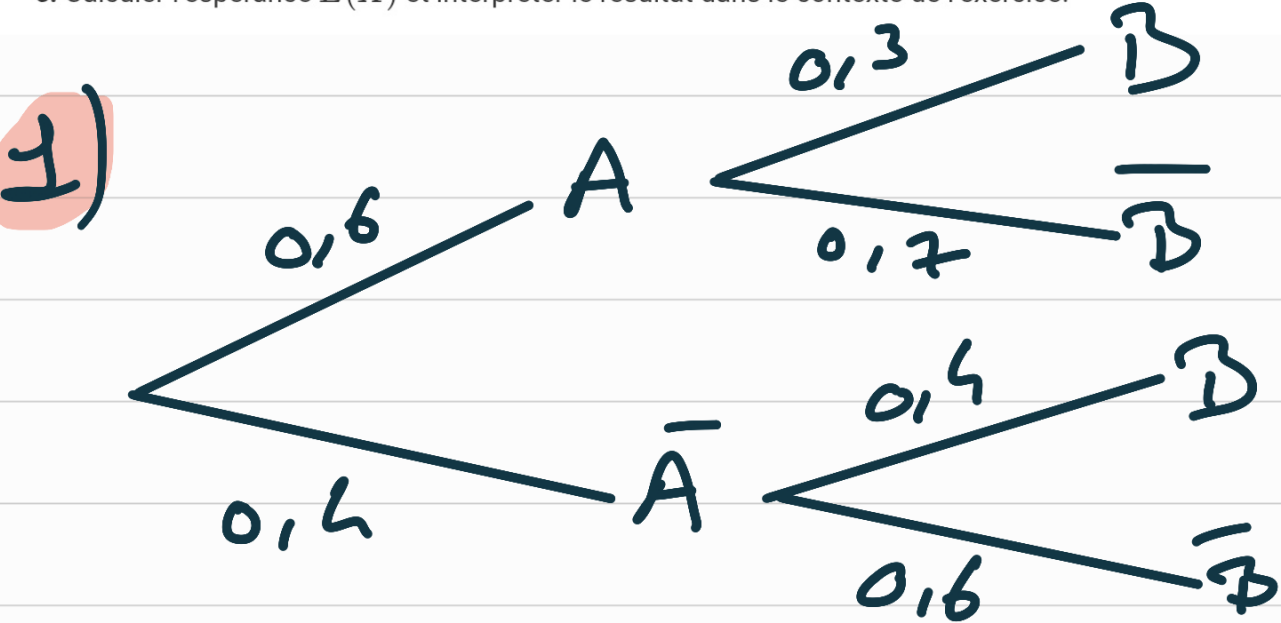
Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son évènement contraire.

Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,6$.

De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,3$;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,4$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que $P(B) = 0,34$.
4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours. Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.
5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance. On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de $0,24$.
 - a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?
 - c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



$$\begin{aligned}
 2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) \\
 &= 0,4 \times 0,6 \\
 &= 0,24.
 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ne tombe pas lors des deux séances est égale à 0,24.

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\
 &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \\
 &= 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,34
 \end{aligned}$$

$$4) P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$= \frac{0,24}{1 - 0,34}$$

$$\approx 0,364$$

donc la probabilité ...

5) On répète 100 fois une même expérience à 2 issues de manière identique et indépendante dont la probabilité de succès est 0,24

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,24)$

$$b) P(X > 20)$$

$$= 1 - P(X \leq 19)$$

$$= 0,855$$

donc la proba ...

$$c) E[X] = 0,24 \times 100$$

$$= 24$$

En moyenne, sur 100 personnes
24 ne tombent ni lors de la
première séance ni lors de la
deuxième séance.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} ;$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S \left(-\frac{1}{2}; 1; 4 \right)$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0$$

c. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .

b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Partie A :

1)

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t = 3 - 2s \end{cases}$$
$$\frac{3 - (-1)}{4} = \frac{3 - 2 \times \frac{1}{2}}{4} \quad s = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow s = \frac{3}{2} + 2t$

$$2 + t = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + 2t \right)$$

$$t, \quad 2 + t = 3 + 2t$$

$$2 - 3 = 2t - t$$

$$-1 = t$$

donc les droites (d) et (d')
sont sécantes au point

$$S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$$

2) $\vec{AB}(2; -3; 1)$

$$\vec{AC}(2; -1; 0)$$

sont deux colinéaires donc
définissent bien un plan.

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + -3 \times 2 + 4 \times 1 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 + 2 \times -1 + 0 \times 4 = 0$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AC}$ et

$\vec{AB}$. Ainsi $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC) .

↳ Comme $\vec{n}$ est normal à (ABC) alors on a :

$$x + 2y + 4z + d = 0$$

$$\alpha A(-1; 2; 1) \in (ABC)$$

$$-1 + 2 \times 2 + 4 \times 1 + d = 0$$

$$7 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -7$$

Donc $x + 2y + 4z - 7 = 0$

$$c) S(-\frac{1}{2}, 1, 4)$$

$$-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 + 8 - 7$$

$$= -\frac{1}{2} + 3$$

$$= \frac{5}{2} \neq 0$$

donc $S \notin (ABC)$

et les points S, A, B, C ne
sont pas coplanaires.