

EXERCICE 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point $H(2; 3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

- Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2 .
 - Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
 - Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
 - Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ? ~~elles sont sécantes~~
- Vérifier que le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
 - On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :
$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $M(3; 3; 5)$.

1) a) un vecteur directeur de la droite (d_1) est $\vec{u}(2; 1; 0)$.

b) $\vec{u}(1, -1, 1)$

$$\vec{v}(2; 1; 0)$$

Comme la coordonnée nulle de $\vec{v}$ ne correspond à la coordonnée du $\vec{u}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

c) $(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \overbrace{2 + 5 = 7} & \overbrace{2x - 2 - 3 = -7} \\ 2 + t = 2k - 3 \\ 3 - t = k \Rightarrow k = -2 \\ \boxed{t = 5} \end{cases}$$

donc le système est impossible
et les droites (d_1) et (d_2)
ne sont pas sécantes.

c) Comme les droites (d_1) et
 (d_2) ne sont ni parallèles ni
sécantes alors elles sont non-
coplanaires.

$$2) a) \vec{\omega} \cdot \vec{u} = 0$$

$$, \vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$$

donc $\vec{\omega}$ est orthogonal
aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\hookrightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0$$

$$\hookrightarrow 5(2k-3) + 4k - 5 - 22 = 0$$

$$\hookrightarrow 10k - 15 + 4k - 5 - 22 = 0$$

$$\hookrightarrow 14k - 42 = 0$$

$$14k = 42$$

$$k = \frac{42}{14} = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k - 3 = 2 \times 3 - 3 = 3 \\ y = k = 3 \\ z = 5 \end{array} \right.$$