

Probabilities

exercice 6:

1) $P(S) = 0,35$

$$P(C) = 0,34$$

$$P(S \cap C) = 0,30$$

$$P(\bar{S} \cap \bar{C}) = 0,01$$

2) $P_S(C) = \frac{P(S \cap C)}{P(S)}$

Exercice 10 corrigé disponible

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T .

- 1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

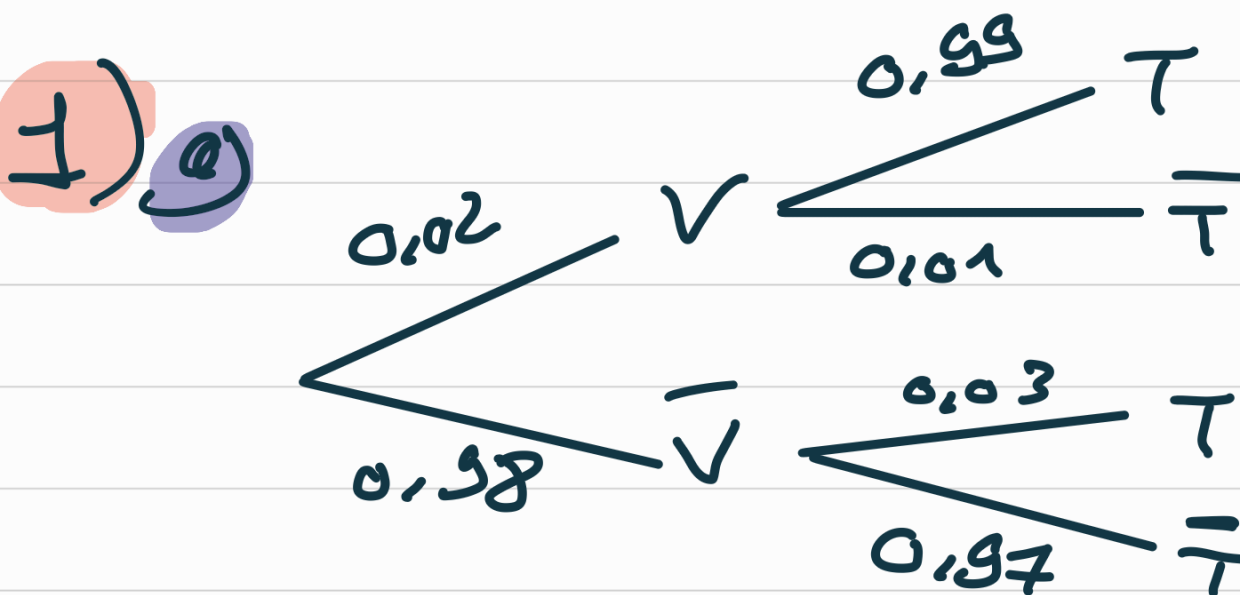
- b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

- 2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

- 3) a) Justifier par un calcul la phrase :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

- b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.



b)

$$P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,0198$$

2) D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(\tau) &= P(V \cap \tau) + P(\bar{V} \cap \tau) \\ &= 0,0198 + P(\bar{V}) \times \underbrace{P(\tau)}_{\bar{V}} \\ &= 0,0198 + 0,98 \times 0,03 \\ &= 0,0492. \end{aligned}$$

donc la proba ...

$$\begin{aligned} 3) a) P_T(V) &= \frac{P(V \cap \tau)}{P(\tau)} \\ &= \frac{0,0198}{0,0492} = 0,4024 \end{aligned}$$

obnc ip y a . . .

$$b) P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$$

$$P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 1 - P_{\bar{V}}(T)$$

$$= \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492}$$

$$\approx 0,99$$

Exercice 22

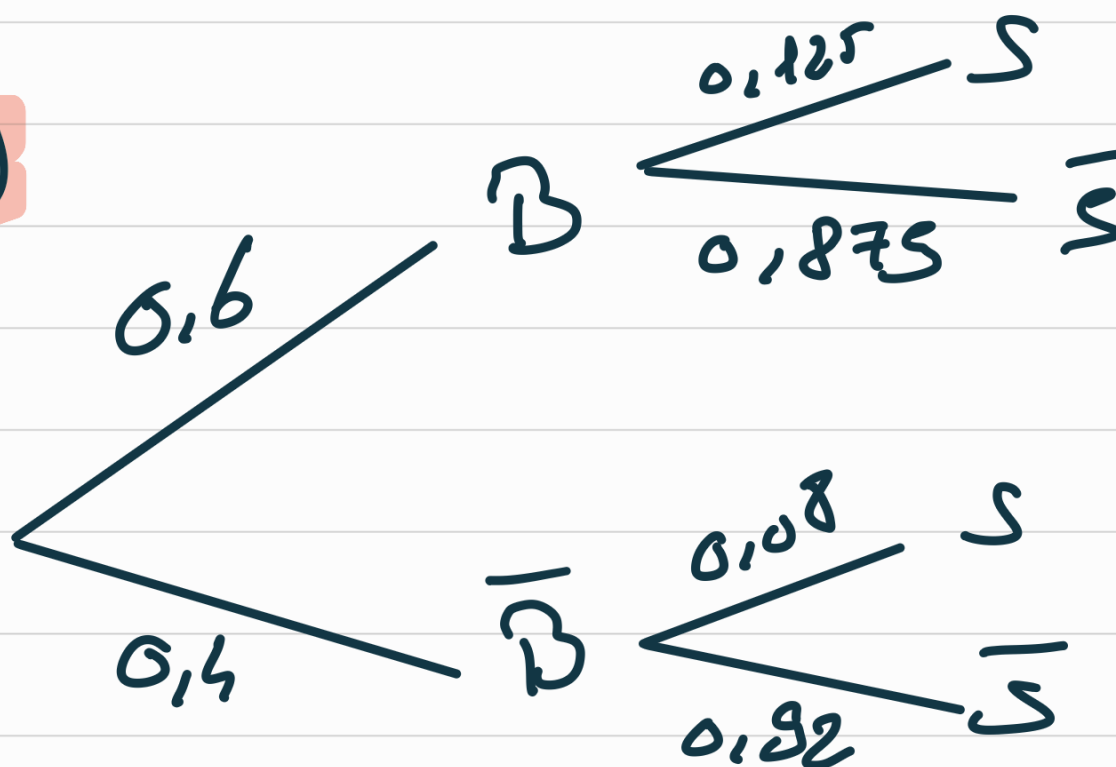
Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.
5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ?
On arrondira le résultat au millièmes.
6. Les événements B et S sont-ils indépendants ?



$$3) P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S)$$

$$= 0,6 \times 0,125$$

$$= 0,075$$

donc la probabilité ... et ...

4) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(B \cap S) + P(\bar{B} \cap S).$$

$$= 0,107.$$

$$5) P(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{0,075}{0,107}$$

$$\approx 0,701$$

done ...

$$6) P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ou

$$P_B(A) = P(A)$$

$$P(B \cap S) = 0,075$$

$$P(B) \times P(S) = 0,6 \times 0,167 \\ = 0,1002$$

$$\text{donc } P(B \cap S) \neq P(S) \times P(B)$$

et B et S ne sont pas indépendants.

$$P(B \cap S) = 0,075$$

$$P(B) \times P(S) = 0,6 \times 0,167 \\ = 0,1002$$

$$\text{donc } P(B \cap S) \neq P(S) \times P(B)$$

et B et S ne sont pas indépendants.

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

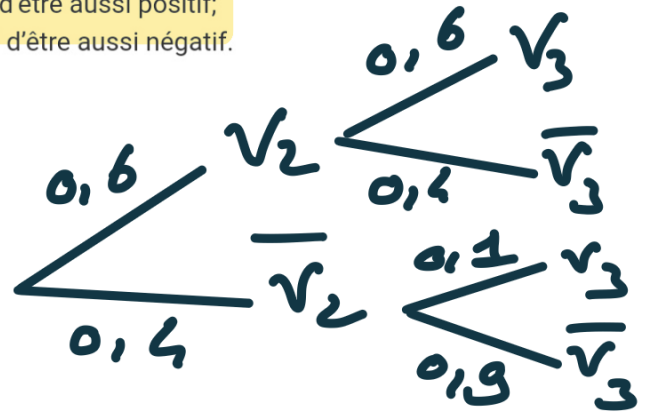
Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : "le n -ième sondage est positif" est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.



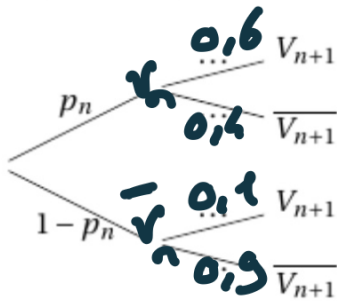
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "les 2^e et 3^e sondages sont positifs";
- B : "les 2^e et 3^e sondages sont négatifs".

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, on admet que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n .

c. Conjecturer la valeur de la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

La preuve si on le demande.

partie suites

$$\begin{aligned} 1) a) P(V_2 \cap V_3) &= P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) \\ &= 0,6 \times 0,6 \\ &= 0,36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) P(\bar{V}_2 \cap \bar{V}_3) &= P(\bar{V}_2) \times P_{\bar{V}_2}(\bar{V}_3) \\ &= 0,4 \times 0,9 = 0,36 \end{aligned}$$

2) D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(V_3) &= P(V_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap \bar{V}_2) \\ &= 0,36 + 0,4 \times 0,1 \\ &= 0,044. \end{aligned}$$

Preuve : $P_{n+1} = 0,5P_n + 0,1$

D'après la formule des probas totales

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P(V_{n+1}) = P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\bar{V}_n \cap V_{n+1}) \\ &= P_n \times 0,6 + (1 - P_n) \times 0,1 \\ &= 0,6P_n + 0,1 - 0,1P_n \\ &= 0,5P_n + 0,1. \end{aligned}$$

Exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$\bullet A = e^3 \times e^4 = e^7$$

$$\bullet B = \frac{e^{-5}}{e^2} = e^{-7}$$

$$\bullet C = \frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}} = e^{2x+1}$$

$$\bullet D = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

$$\bullet E = e^2 \times e^{-4} = e^{-2}$$

$$\bullet F = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}} = e^{-6}$$

$$\bullet G = e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$$

$$\bullet H = (e^{3x+2})^2 = e^{6x+4}$$

$$\bullet I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5} = e^{-x+6}$$

$$\bullet J = \frac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}} = e^{-4x+5}$$

$$\bullet K = \frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}}$$

$$= e^{-x-7} \times e^{5x+4}$$

$$= e^{4x-3}$$

$$(e^x + 2)^2 = (e^x)^2 + 2 \times e^x \times 2 + 2^2$$

$$= e^{2x} + 4e^x + 4$$

$$(e^x - 1)(e^x + 4) = e^x \times e^x + e^x \times 4 - e^x - 4$$
$$= e^{2x} + \overbrace{4e^x - e^x}^{3e^x} - 4$$