

EDO 2

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

$$\textcircled{1} \quad y'' + ay' + by = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + ar + b = 0$$

↳ Équation caractéristique

. $\Delta > 0$: r_1 et r_2 solutions

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

$$\underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

• $\Delta = 0$: r_0 solution double

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x},$$

$$\underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

• $\Delta < 0$: $\alpha \pm i\beta$.

$$y(x) = \underline{e^{\alpha x}} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right)$$

$$= C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

$$, \underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

② solution particulière

second membre $\rightarrow f(x)$

- si $f(x) =$ polynôme de degré n .

$\hookrightarrow$ on cherche $f(x)$ sous la même forme.

exemple : second membre $f(x) = x^4$

$\hookrightarrow$ on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et on fait une identification.

- si $f(x) = A \cos(wx)$ ou $B \sin(wx)$

↳ on cherche $f(x)$ sous la forme $k \cos(\omega x) + k' \sin(\omega x)$

exemple : second membre
 $f(x) = \cos(2x)$.

↳ on pose $f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
et on fait une identification.

- si $f(x) = A e^{\lambda x}$

- * si λ racine simple de f'
équation caractéristique.

↳ on cherche $f(x) = B x e^{\lambda x}$

- * si λ racine double de f'
équation caractéristique.

↳ on cherche $f(x) = Bx^2 e^{\lambda x}$

* si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique.

↳ on cherche $f(x) = B e^{\lambda x}$

T1D2

exercice 8:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

$$\textcircled{1} \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$\Rightarrow$ équation caractéristique:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

$$r_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$r_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

donc $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

• on pose $y_p(x) = \underbrace{kx}_u e^{\sqrt{x}}$

$$y_p'(x) = k e^x + kx e^x$$

$$y_p''(x) = \underbrace{k e^x + k e^x}_{2k e^x} + kx e^x$$

Comme y_p est une solution particulière :

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^x$$

$$2k e^x + kx e^x - 3k e^x - 3kx e^x + 2kx e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow -ke^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Ainsi on pose $y_p(x) = -xe^x$.

Donc les solutions sont de la forme :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x,$$

$$\underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

exercice 9:

$$y'' - y = 6\cos x + 2x\sin x$$

① $y'' - y = 0$

Equation caractéristique: $r^2 - 1 = 0$

$$y_{\text{ch}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad \underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

② solution particulière:

$$f(x) = A P_1(x) \cos(\beta x) + 2 P_2(x) \sin(\beta x)$$

$$\hookrightarrow y_p(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)]$$

α = partie réelle des solutions
de l'équation caractéristique

$P(x)$ et $Q(x) \Rightarrow$ polynômes de
degré $= \max(\deg(P), \deg(Q))$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i\pi \pm = i$ n'
est pas une racine de l'équation
caractéristique.

$\Rightarrow P_1(x) = 6$ et $P_2(x) = 2x$

$\hookrightarrow$ maximum des deux degrés
vaut 1.

on pose : $y_p(x) = P(x)\cos(x) +$
 $Q(x)\sin(x)$

avec $P(x) = a_1 x + b_1$

$Q(x) = a_2 x + b_2$.

$$y_p(x) = (a_1x + b_1)\cos(x)$$

$$+ (a_2x + b_2)\sin(x).$$