

Exercice 3 :

Une ville dispose de 380 véhicules et propose un système de location mensuelle de ces véhicules.

Au cours du mois de janvier 2021, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable constate que chaque mois, 10% des contrats de locations du mois précédent prennent fin, et que 42 nouveaux contrats de location sont signés.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de véhicules par mois.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de voitures louées le n -ième mois après le mois de janvier 2021.

Ainsi $u_0 = 280$.

1. Déterminer u_1 , c'est-à-dire le nombre de voitures qui ont été louées avec ce système de location au cours du mois de février 2021.

2. Justifier que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 42$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 420$$

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

5. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = u_n - 420$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.

b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .

c. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = -140 \times 0,9^n + 420$$

→ sur le long terme

6. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

7. La ville, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des véhicules supplémentaires pour répondre à la demande.

Le responsable de la ville souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.

On souhaite, pour résoudre ce problème, utiliser le programme écrit en Python ci-dessous.

Dans ce programme, la variable n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2021, et la variable u calcule le nombre de véhicules qui seront loués ce mois-là.

```
def v():  
    n=0  
    u=280  
    while u < 420:  
        n=n+1  
        u=0,9u+42  
    return n
```

a. Recopier et compléter ce programme.

b. Quelle valeur contient la variable n à la fin de l'exécution de ce programme ? $n = 10$

c. En déduire le mois durant lequel la ville devra augmenter son parc de véhicules si elle veut satisfaire la demande.

↳ novembre 2021.

3)

on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 420$$

$$0,9 \times 0 \leq 0,9 u_n \leq 0,9 u_{n+1} \leq 0,9 \times 420$$

$$0 \leq 0,9 u_n \leq 0,9 u_{n+1} \leq 378$$

$$0 + 42 \leq 0,9 u_n + 42 \leq 0,9 u_{n+1} + 42 \\ \leq 378 + 42$$

$$0 \leq 42 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 420$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 420$.

4) la suite (u_n) est croissante et majorée par 420, donc

$$\begin{aligned}
 5) \quad a) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 \\
 &= 0,9u_n + 42 - 420 \\
 &= 0,9u_n - 378 \\
 &= 0,9 \left(u_n - \frac{378}{0,9} \right) \\
 &= 0,9(u_n - 420) \\
 &= 0,9v_n.
 \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$

b) (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -140$

donc $v_n = -140 \times 0,9^n$.

5) $v_n = u_n - 420$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_n &= v_n + 420 \\ &= -140 \times 0,9^n + 420 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{X} & q \leq -1 \end{cases}$$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 420$.

Exercice 1 (Sujet Calédonie 27 oct 2022 - 10 pts) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Déterminer f' .
b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x = e$.
c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$;
en déduire la position relative de la courbe C_f et de la tangente T .
2. a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
b) Déterminer un encadrement de α au dixième.
c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

On rappelle que la fonction `log` du module `math` désigne la fonction logarithme népérien $\ln$.

```
def seuil(pas) :
    x=4.3
    while x*log (x) - x - 2 < 0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

1) $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$

donc f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, et T est au-dessus de la courbe C_f sur $]0 ; +\infty[$.