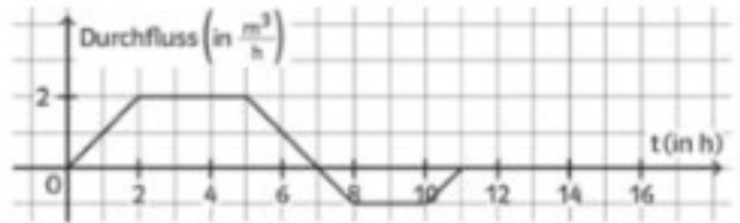


Chapitre 2

Zu 1. Größen mithilfe der momentanen Änderungsrate rekonstruieren

a) Ein zu Beginn leerer Tank wird durch eine Leitung befüllt und entleert. Die Durchflussgeschwindigkeit der Flüssigkeit in der Leitung ist im Graphen dargestellt. Ermitteln Sie die Flüssigkeitsmenge im Tank nach 4, 7 und 11 Stunden.

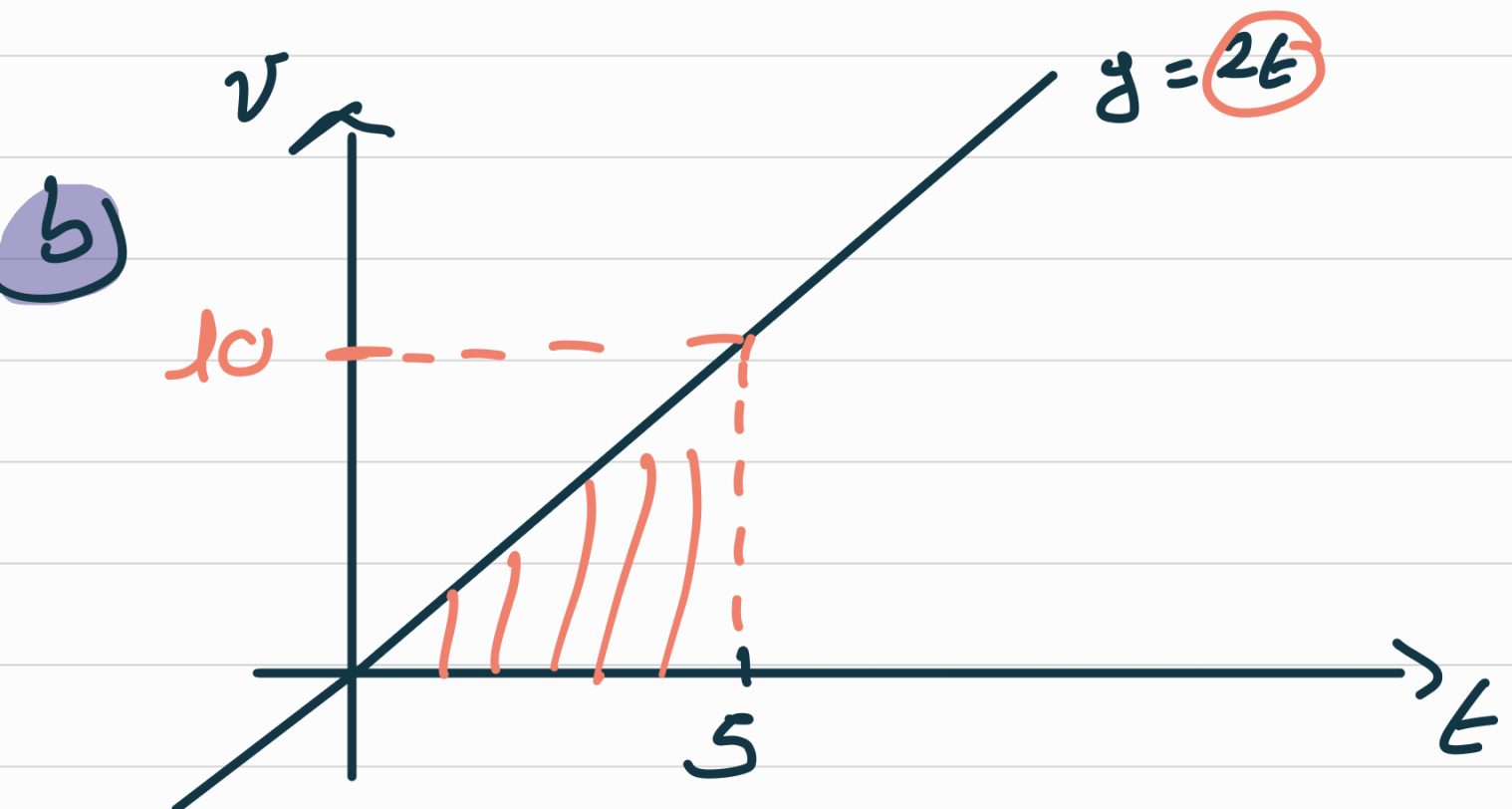


b) Ein Körper wird beschleunigt. Seine Geschwindigkeit wird in den ersten fünf Sekunden durch die Funktion v mit $v(t) = 2t$ (t in Sekunden, $v(t)$ in Metern pro Sekunde) beschrieben. Ermitteln Sie den zurückgelegten Weg innerhalb dieser ersten fünf Sekunden.

a) $t = 4 \Rightarrow 2 + 4 = 6 \text{ m}^3$.

$t = 7 \Rightarrow 6 + 4 = 10 \text{ m}^3$

$t = 11 \Rightarrow 10 - 3 = 7 \text{ m}^3$.



$$d = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25 \text{ m}$$

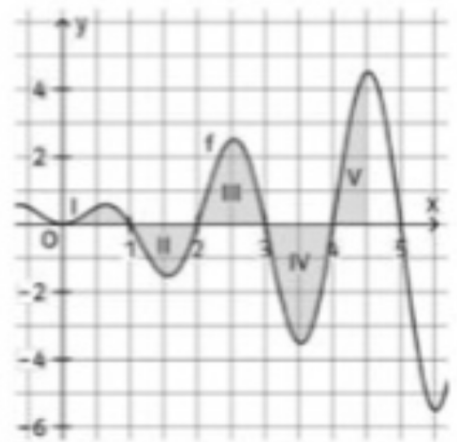
$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{b \times h}{2}$$

ϵ $v(t)$

Zu 2. Mit dem bestimmten Integral den orientierten Flächeninhalt angeben

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit den abschnittsweise markierten orientierten Flächeninhalten I bis V. Drücken Sie den angegebenen orientierten Flächeninhalt mit der Integralschreibweise aus.

- a) I
- b) III + IV + V
- c) II + IV



a) $\int_0^1 f(x) dx$

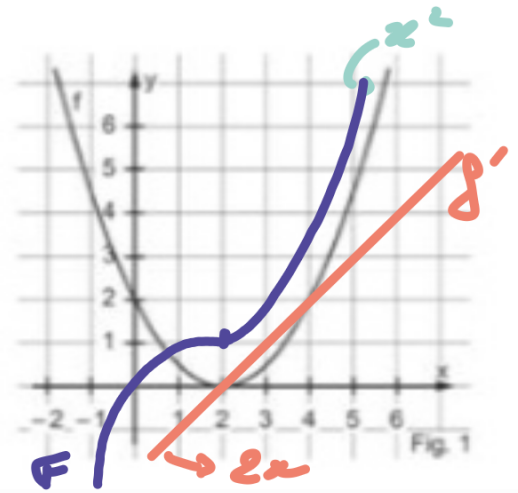
b) $\int_2^{4.5} f(x) dx$

c) $\int_1^2 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

Zu 3. Graph einer Flächeninhaltsfunktion skizzieren

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f . Skizzieren Sie dazu einen Graphen

- a) der Ableitungsfunktion f' ,
- b) einer Flächeninhaltsfunktion F .



Zu 4. Prüfen, ob eine Funktion F eine Stammfunktion von f ist

Prüfen Sie, ob F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f(x) = x + 5$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2$; $F(x) = 2x^4 + 5x^3$

c) $f(x) = 0,2x^3$; $F(x) = 0,08x^4 + 7$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 18$

e) $f(x) = x^2 + x$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5$

f) $f(x) = x^2 + x$; $F(x) = 2x^3 + 5x^2$

a) $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x + 5 = x + 5 = f(x)$

donc F est primitive de f .

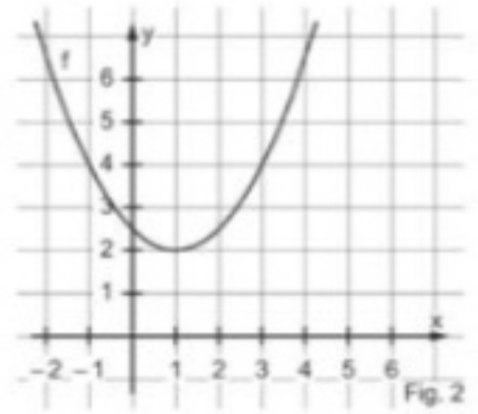
b) $F'(x) = 8x^3 + 15x^2 \neq f(x)$

donc F n'est pas une primitive de f .

Zu 5. Zusammenhänge zwischen F und f erkennen

Der Graph einer Funktion f ist dargestellt. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

- a) Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle.
- b) Die Funktion f hat das lokale Minimum 2.
- c) Eine Stammfunktion F von f kann eine Nullstelle an der Stelle $x = 0$ haben.
- d) Eine Stammfunktion F von f hat bei $x = 2$ eine Wendestelle.



a) elle admet un minimum en $x = 1$. ✓ vraie

b) elle admet par minimum 2 en $x = 1$. ✓ vraie

c) On peut toujours trouver une primitive telle que $\underline{F(0) = 0}$ s'annule en 0.

d) Faux car $g = F'$ n'admet pas d'extremum en $x = 2$.

Zu 6. Stammfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion F der Funktion f .

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{17}$

c) $f(x) = 150x^4 + 2x^3 - 145x^4$

d) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 15$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$

f) $f(x) = (x^2 + 3x)^2$

a) $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$

b) $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{17}$

$\hookrightarrow F(x) = 5 \times \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} + \sqrt{17}x$

$$= \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + x\sqrt{17}!$$

Zu 7. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung anwenden

Bestimmen Sie das Integral mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

a) $\int_1^2 (5x^4 - 3x^2 - x) dx$

b) $\int_{-5}^5 (3x)^2 dx$

c) $\int_1^7 (x + 5) dx$

a) $\int_1^2 (5x^4 - 3x^2 - x) dx$

$$= \left[5x \frac{x^5}{5} - 3x \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left[x^5 - x^3 - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left(2^5 - 2^3 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(1^5 - 1^3 - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$= (32 - 8 - 2) - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

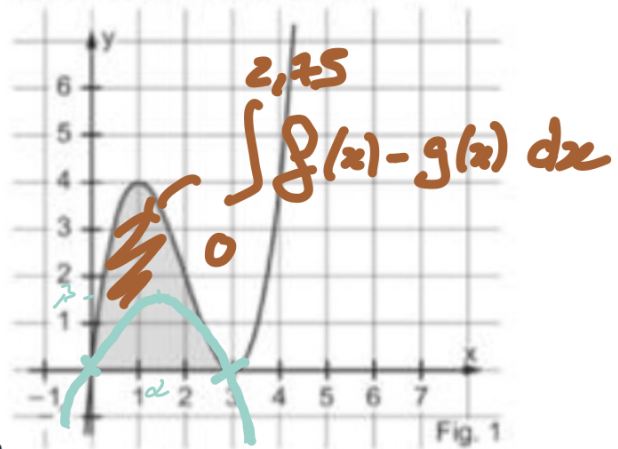
$$= 22 + \frac{1}{2} = 22,5.$$

Zu 8. Inhalt einer Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse bestimmen

Ein Flussgebiet wird immer wieder von Überschwemmungen geplagt, da der Fluss in großen Kurven durch die Landschaft verläuft. In dem betroffenen Abschnitt lässt sich der Flusslauf näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ beschreiben (x und $f(x)$ jeweils in km).

- a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Überschwemmungsgebiets (graue Fläche).
- b) Ein Ingenieur hat die Idee, den Fluss zu begradigen. Der neue Verlauf lässt sich zwischen 0 km und 2,75 km näherungsweise durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$ beschreiben.

Skizzieren Sie den neuen Verlauf des Flusses. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die nun nicht mehr überschwemmt wird.



$$a) \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x dx$$

= . . .

$$b) g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$$

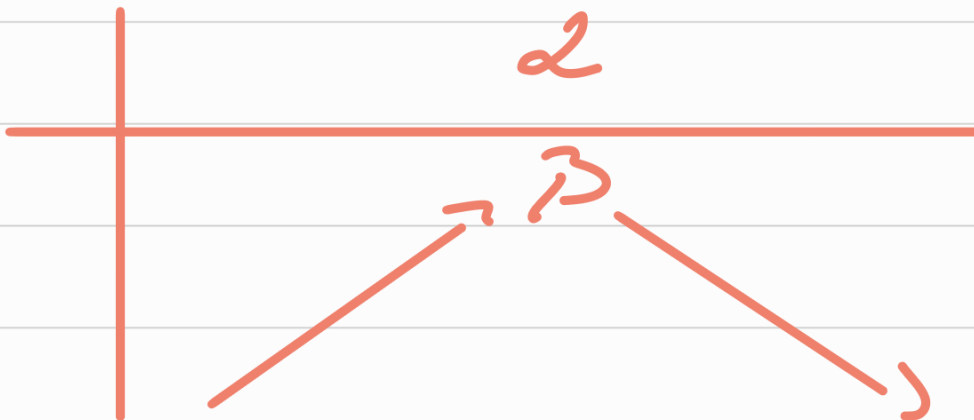
↳ Methode Trapez g .

$$\textcircled{1} \quad \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3/4}{\cdot 2/4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\begin{aligned} \beta &= g(\alpha) = -\frac{1}{4}x\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x\frac{3}{4} \\ &= \frac{27}{16} \\ &= 1,6875 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$$

> 0



$$\textcircled{3} \quad \Delta = b^2 - 4ac = \frac{9}{16} > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0.$$

$$\textcircled{5} \quad \int_0^{2,75} f(x) - g(x) \, dx$$

$$= \int_0^{4,75} \left(x^3 - 6x^4 + 9x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x \right) dx$$

$$= \int_0^{4,75} x^3 - \frac{23}{4}x^4 + \frac{33}{4}x^2 \, dx = \dots$$

Zu 9. Inhalt einer Fläche zwischen zwei Graphen bestimmen

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 2(x-4) + 3$.

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

