

Galilee

Automatisme :

Question 1

Mettre l'expression $\frac{1}{3} - \frac{2-x}{2}$ sous la forme $\frac{a+bx}{c}$, avec a, b et c entiers relatifs.

a) $\frac{-1+x}{1}$

b) $\frac{2-3x}{6}$

c) $\frac{3-x}{5}$

d) $\frac{-4+3x}{6}$

$$\rightarrow \frac{2-3(2-x)}{6} = \frac{2-6+3x}{6} = \frac{-4+3x}{6}$$

Question 2

Calculer l'expression $B = \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{2}}{b}$ pour $a = \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}$.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

$$B = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{6} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Question 3

Soit la relation suivante : $C = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$. On peut alors affirmer que :

a) $x = 2 \left(\frac{1}{C} - \frac{y}{3} \right)$

b) $x = \frac{2y}{Cy-3}$

c) $x = \frac{5-Cy}{C}$

d) $x = \frac{5}{2C}$ car $x = \frac{2y}{Cy-3}$

$$C - \frac{3}{y} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{Cy-3}{y} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x(Cy-3) = 2y$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$

Question 4

Dans un club sportif les trois quarts des adhérents sont mineurs et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. La proportion des 18-25 ans est :

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{3}$

$$1 \frac{m^3}{h} = \frac{1000 L}{3600 s}$$

Question 5

Le débit d'une rivière est de $36 m^3 \cdot h^{-1}$ son débit en $L \cdot s^{-1}$ est :

a) 3600

b) 10

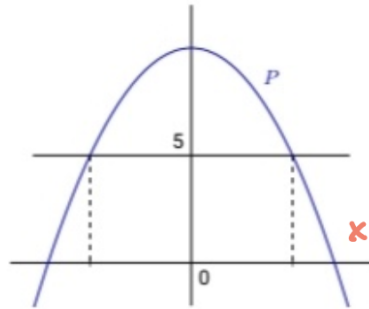
c) 100

d) 1000

$$1 m^3 = 1000 L \\ 1 h = 3600 s$$

Question 6

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \rightarrow -x^2 + 10$.



$$-x^2 + 10 \leq 5$$

$$-x^2 \leq 5 - 10 = -5$$

$$x^2 \geq 5$$

$$\Rightarrow x \geq \sqrt{5} \text{ or } x \leq -\sqrt{5}$$

On note (Γ) l'inéquation, sur $\mathbb{R}$, $f(x) \leq 5$. L'inéquation (Γ) est équivalente à :

a) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

b) $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$

c) $x \geq \sqrt{5}$

d) $x = -\sqrt{5}$ et $x = \sqrt{5}$

Question 7

Voici une série de notes avec les coefficients associés :

Note	10	7	x
Coefficient	1	2	2

$$\frac{10 + 14 + 2x}{5} = 12$$

$$24 + 2x = 60$$

$$\Leftrightarrow 2x = 60 - 24 = 36$$

$$x = 18$$

On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 12$?

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20

Question 8

Durant les soldes, le prix d'un article baisse de 30 % puis de 20 %, le prix de l'article a subi une baisse de :

a) 10%

b) 56%

c) 44%

d) 60%

$$\left(1 - \frac{30}{100}\right) \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,70 \times 0,80 = 0,56$$

Exercice 1 (~6 points)

Partie A : Modèle continu

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{3+x}{2x}$ et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2$.

1. Montrer que trouver les abscisses des points d'intersection entre g et f revient à résoudre sur $\mathbb{R}^*$

$$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x} = 0$$

2. Donner les coordonnées de ces points d'intersection.
3. Dresser le tableau de signes de l'expression $\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$.
4. En déduire les positions relatives de C_f et C_g , respectivement courbes représentatives de f et g .

Partie B : Modèle discret

On pose (u_n) suite définie sur $\mathbb{N}$ et (v_n) suite définie sur $\mathbb{N}^*$ respectivement par :

$$u_n = f(n) = n - 2 \quad \text{et} \quad v_n = g(n) = \frac{3+n}{2n}$$

1. Pour chacune de ces deux suites, répondre aux questions suivantes :

- (a) Calculer le terme d'indice 2 et le 4^{ème} terme. $\rightarrow u_3 \text{ et } v_4$.
- (b) Donner l'expression réduite du terme d'indice $n + 1$.
- (c) ~~Etudier le sens de variation avec la méthode de votre choix.~~

2. On définit la suite (w_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = v_n - u_n$.

~~Etudier le sens de variation de (w_n) à l'aide de la méthode de votre choix.~~

2) $x = -\frac{1}{2} \quad x = 3$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} = g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(3) = 3 - 2 = 1 = g(3)$$

donc les coordonnées :

$$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \text{ et } (3; 1).$$

3) $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	3	$+\infty$
$-2x^2 + 5x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$	$+$	0	$-$	0	$-$

4) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2 - 2 > \frac{3+x}{2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x}{2x} > \frac{3+x}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$$

donc $\mathcal{E}_g$ est au dessus de $\mathcal{E}_g$ sur $[3; +\infty[$ et $[-\frac{1}{2}; 0[$.

et $\mathcal{E}_g$ est au dessus de $\mathcal{E}_g$ sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et $]0; 3]$.

Fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^x$.

1) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x :

$$g'(x) = (2x + 1)e^x$$

2) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour tout réel x , $e^x > 0$.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction g .

4) Déterminer l'abscisse du point de la courbe $\mathcal{C}_g$ où la tangente est horizontale. $g'(x) = 0$

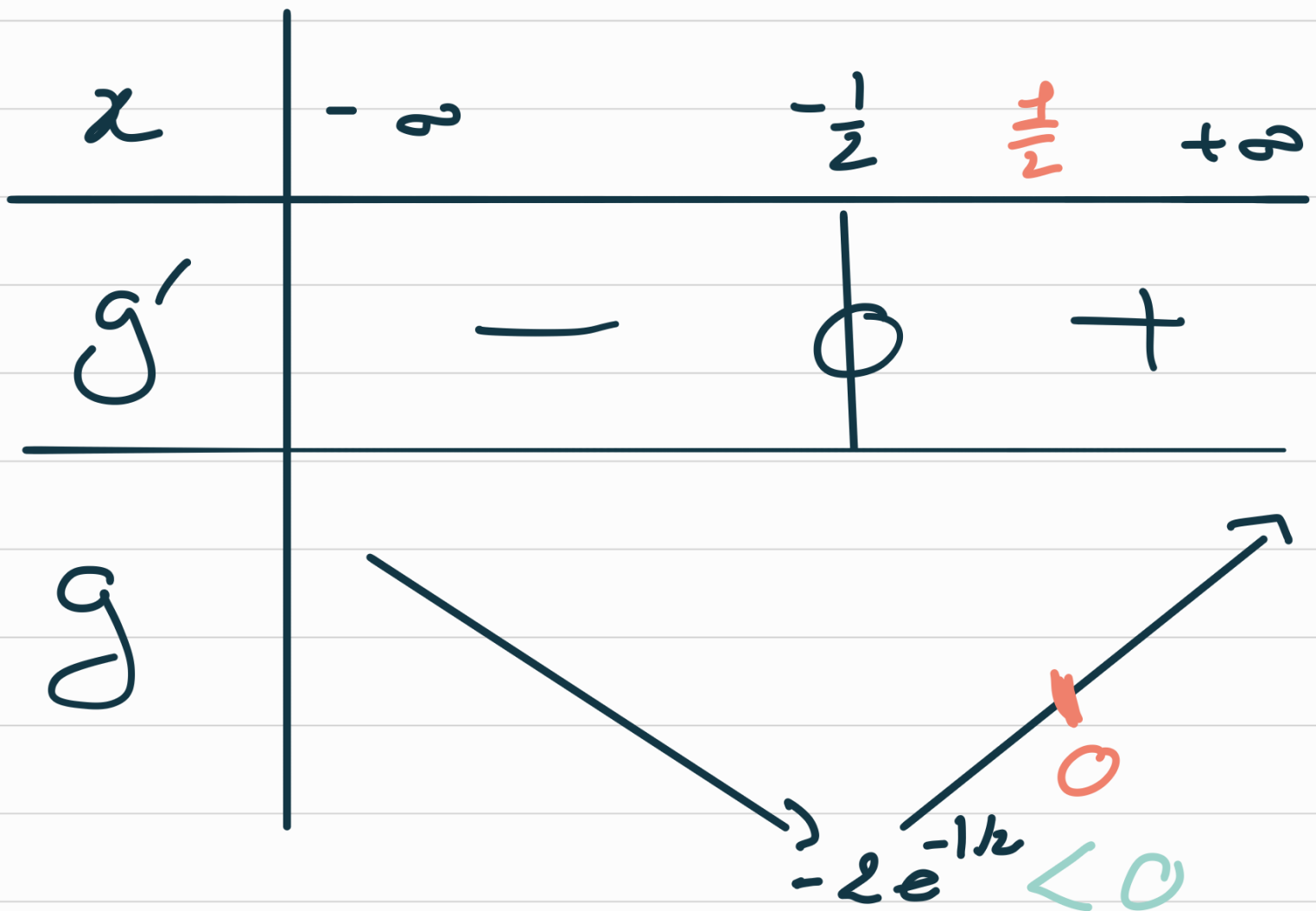
5) a) Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = 0$.

b) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

c) Dresser, à l'aide des questions précédentes, le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. $g(x) = 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad g'(x) &= 2e^x + (2x - 1)e^x \\ &= e^x (2 + (2x - 1)) \\ &= \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{(2x + 1)}_{ax+b \rightarrow -\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'	$-$	$\emptyset$	$+$



$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2x - \frac{1}{2} - 1\right)e^{-1/2}$$

$$= -2e^{-1/2}$$

4) $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow e^x(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

donc l'abscisse du point
est $x = -\frac{1}{2}$.

5) $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

5) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)e^{1/2} = 0$

Donc les coordonnées sont $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

5)

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Suites numériques

Un investisseur place 10 000 € sur un compte le 1^{er} janvier 2024. Chaque année, ce capital rapporte 4 % d'intérêts, mais l'investisseur retire 500 € à la fin de chaque année pour ses frais de gestion. On note u_n le capital au 1^{er} janvier de l'année 2024 + n . On a donc $u_0 = 10\,000$.

1) Calculer u_1

2) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,04u_n - 500$.

3) On pose $v_n = u_n - 12\,500$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

⚠ Aide au calcul : $1,04 \times 12\,500 = 13\,000$.

b) Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que $u_n = 12\,500 - 2\,500 \times 1,04^n$.

4) Au bout de combien d'années le capital sera-t-il inférieur à 8 000 € ?

⚠ Aide au calcul : $1,04^5 = 1,217$, $1,04^{10} = 1,480$, $1,04^{15} = 1,801$, $1,04^{18} = 2,026$

Analyse et polynômes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 3) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$. Préciser les extremums locaux.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$.
- 5) Justifier que $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

1) $f'(x) = 3x^2 - 3$.

2)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

3)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g'	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$+$
g		$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow$

4)

$$g = g'(2)(x-2) + g(2)$$

$$= 9(x-2) + 4$$

$$= 9x - 18 + 4$$

$$g'(2) = 3 \times 2^2 - 3$$

$$= 12 - 3 = 9$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 2$$

$$= 8 - 6 + 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$y = 9x - 14.$$