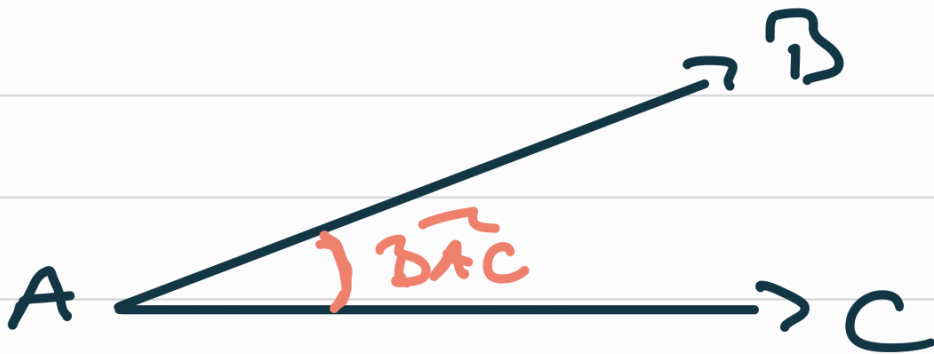


Produit Scalaire

- formule avec trigonométrie:



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

- formule avec les normes:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| - \|\vec{AB} - \vec{AC}\| \right)\end{aligned}$$

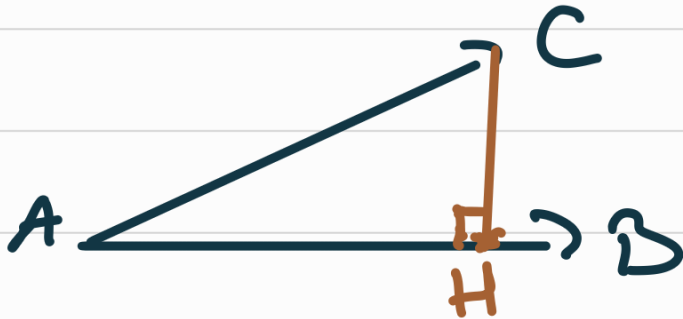
• formule avec coordonnées :

$$\vec{AB}(x_{AB}; y_{AB})$$

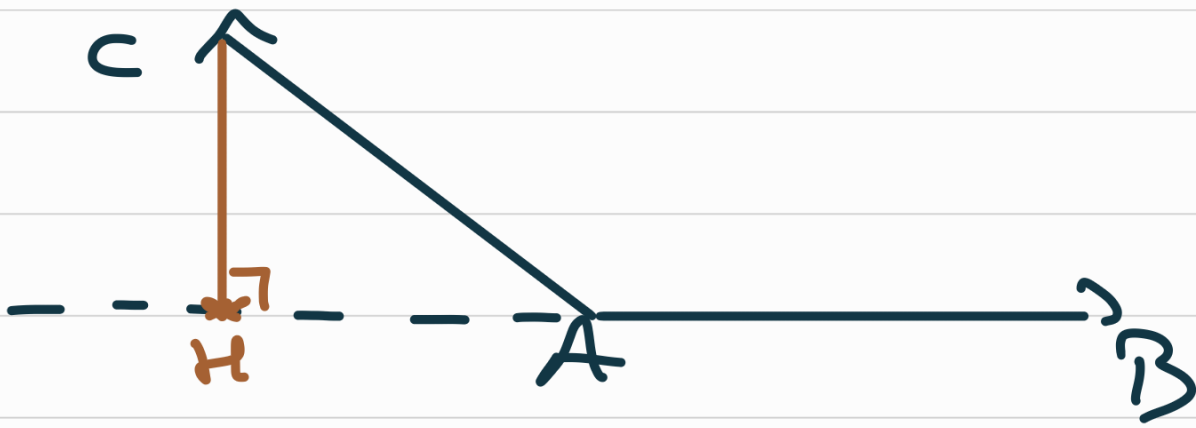
$$\vec{AC}(x_{AC}; y_{AC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x_{AB} \times x_{AC} + y_{AB} \times y_{AC}$$

• formule avec projeté orthogonal :



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

Exercice 1

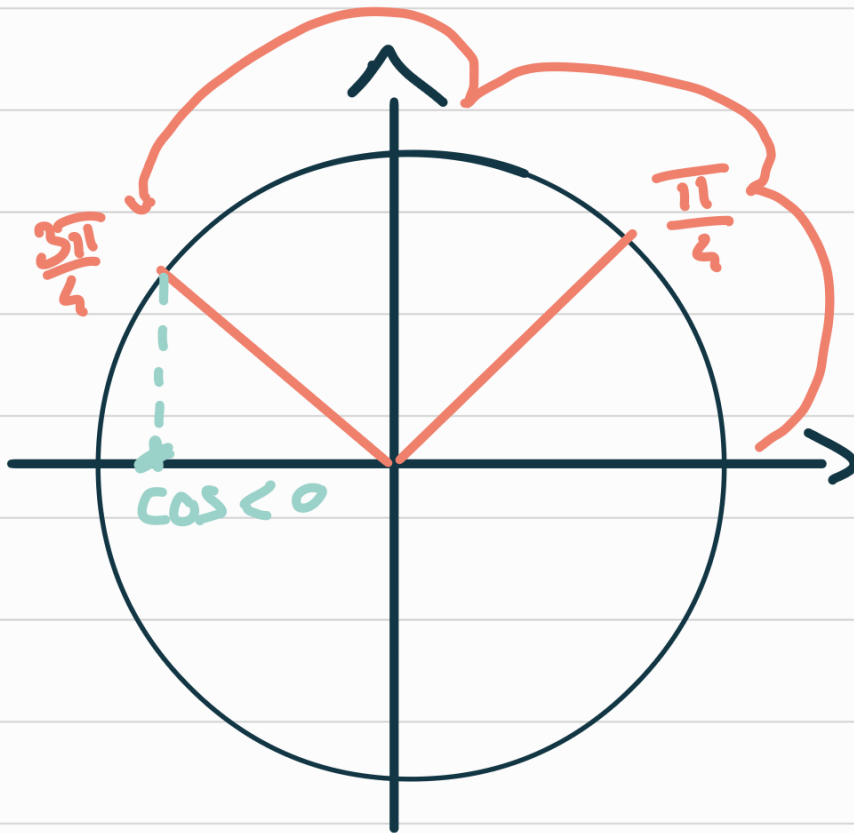
Soit ABC un triangle tel que $AB=5$, $AC=3$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$= 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 15 \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{15\sqrt{2}}{2}.$$



Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.
Déterminer $\|\vec{v}\|$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$7 = 2 \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$7 = \cancel{2} \times \|\vec{v}\| \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$7 = \|\vec{v}\| \times \sqrt{3}$$

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \|\vec{v}\|$$

$$\text{donc } \|\vec{v}\| = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Exercice 3

Soit $M(1;3)$, $N(4; -2)$ et $P(2; -1)$ trois points dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\vec{MN} \cdot \vec{MP}$.

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ en degrés à 0,1 près.

$$1) \vec{MN} (4-1; -2-3)$$

$$\vec{MN} (3; -5)$$

$$\vec{MP} (1; -4)$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{MP} = 3 \times 1 + -5 \times -4$$

$$= 3 + 20$$

$$= 23$$

$$2) \quad \underbrace{\vec{MN} \cdot \vec{MP}}_{23} = \underbrace{MN}_{?} \times \underbrace{MP}_{?} \times \cos(\widehat{NMP})$$

$$MN = \sqrt{3^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$MP = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

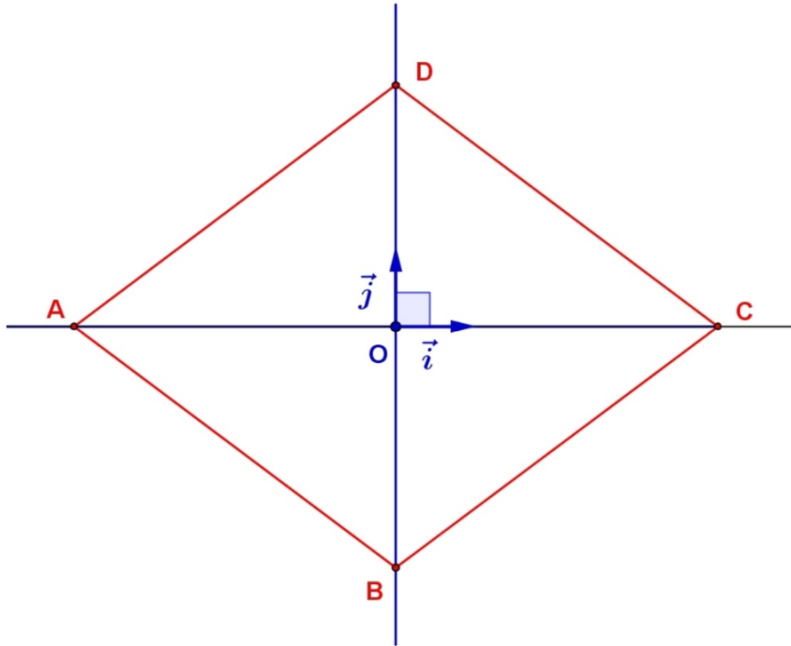
$$23 = \sqrt{34} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{NMP})$$

$$\frac{23}{\sqrt{34} \times \sqrt{17}} = \cos(\widehat{NMP})$$

done $\widehat{NMQ} = \arccos \left(\frac{23}{\sqrt{34} \times \sqrt{27}} \right)$
 $\approx 17^\circ$.

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que $OA=4$ et $OD=3$.



1. Calculer les produits scalaires suivants:

a. $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$

b. $\vec{BO} \cdot \vec{BC}$

c. $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$

d. $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$

a) $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = AC \times AO$
 $= 8 \times 4$
 $= 32.$

b) $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = BO \times BO$
 $= 3 \times 3 = 9$

c) Comme $ABCD$ est un parallélogramme, alors :

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$c) \text{ car } \vec{AB} \cdot \vec{DC}$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{AB}$$

$$= AB \times AB$$

$$= AB^2 = 25$$

Par Pythagore :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$= 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$d) \vec{BC} \cdot \vec{BD}$$

$$= BO \times BD$$

$$= 3 \times 6$$

$$= 18.$$