

Chapitre 1

Zu 1. Funktionen auf Symmetrie untersuchen

Untersuchen Sie die Graphen der ganzrationalen Funktion f auf Symmetrie zur y -Achse oder zum Koordinatenursprung.

a) $f(x) = 3x^4 + 5x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$ c) $f(x) = ax^5 + 3x^3$ d) $f(x) = 3x^5 + ax^2 - \frac{1}{3}x$

e) Der Graph der Funktion h ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen von g mit $g(x) = x \cdot h(x)$.

a) $f(x) = 3x^4 + 5x^2$

↳ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

↳ ni l'un ni l'autre.

e)
$$\begin{aligned} g(-x) &= -x \times \underbrace{h(-x)}_{\text{h paire}} \\ &= -x \times h(x) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

donc g est impaire et elle est symétrique par rapport à l'origine.

Zu 2. Ganzrationale Funktionen auf ihr Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ untersuchen

Untersuchen Sie die ganzrationale Funktion f auf ihr Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 5x^2$ b) $f(x) = 3x^3 - 10000x^2$ c) $f(x) = ax^5 + x^2$ d) $f(x) = x^5 + ax^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 5x^2$

Für $x \rightarrow +\infty$ ist $f(x) \rightarrow -\infty$

Für $x \rightarrow -\infty$ ist $f(x) \rightarrow -\infty$

$$b) f(x) = 3x^3 - 10 \cos x^2$$

Für $x \rightarrow +\infty$, ist $f(x) \rightarrow +\infty$

Für $x \rightarrow -\infty$, ist $f(x) \rightarrow -\infty$

Zu 3. Schnittpunkte eines Graphen mit den Koordinatenachsen ermitteln

Bestimmen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 2(x-2)^2 \cdot (x+4)$

c) $f(x) = x^5 + ax^2$

$$= \underbrace{x^2}_{=0} (\underbrace{x^3 + a}_{=0})$$

$$a) f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

• y-achse : $f(0) = -\frac{3}{2}$

also $S_y(0 | -\frac{3}{2})$

• x -achse : $f(x) = 0$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$



$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -3.$$

donc $S_{x_1} \left(\frac{1}{2} \mid 0 \right)$

$$S_{x_2} (-3 \mid 0).$$

Zu 4. Extrem- und Wendepunkte eines Graphen einer ganzrationalen Funktion bestimmen

Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1$. Geben Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f an.

• extrem: $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{12} \times 4x^3 - \frac{1}{3} \times 3x^2$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{3}x - 1 \right) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{3}x - 1 = 0$$



$$x = 0$$



$$\frac{1}{3}x = 1$$



$$x = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\begin{aligned} \cdot f''(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x \\ &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$f''(a) > 0 \Rightarrow x=a \text{ minimum}$$

$$f''(a) < 0 \Rightarrow x=a \text{ maximum}$$

$f''(0) = 0$, on peut pas conclure.

$f''(3) = 3 > 0$, donc minimum.

$$\bullet f''(x) = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$f'''(x) = 2x - 2$$

$$f'''(0) = -2 \neq 0$$

et $f'''(2) = 2 \neq 0$.

donc 0 et 2 sont des points d'inflexion.

extrema :

① résoudre $f'(x) = 0$

② regarde $f''(a)$ avec
a solution de $f'(x) = 0$

$f''(a) > 0$

min

$f''(a) = 0$

X

$f''(a) < 0$

max.

• inflexion :

① résoudre $f''(x) = 0$

② calculer $f'''(a)$ avec
a solution de $f''(x) = 0$.

$f'''(a) \neq 0$ ✓



$f'''(a) = 0$



• minimum : $T\left(3 \mid -\frac{5}{4}\right)$
↪ $f(3)$

• points d'inflexion :

$$w_1(0 | \textcircled{1})$$

$\hookrightarrow f(0)$

$$w_2(2 | \textcircled{-\frac{1}{3}})$$

$\hookrightarrow f(2)$

Zu 5. Graphen ganzrationaler Funktionen skizzieren

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

- Berechnen Sie die Nullstellen von f . $\rightarrow f(x) = 0$
- Bestimmen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f . $\rightarrow f'(x) = 0$
- Geben Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ an.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $[-1; 4]$.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$\underbrace{x^2}_{=0} \left(\underbrace{\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}}_{=0} \right) = 0$$

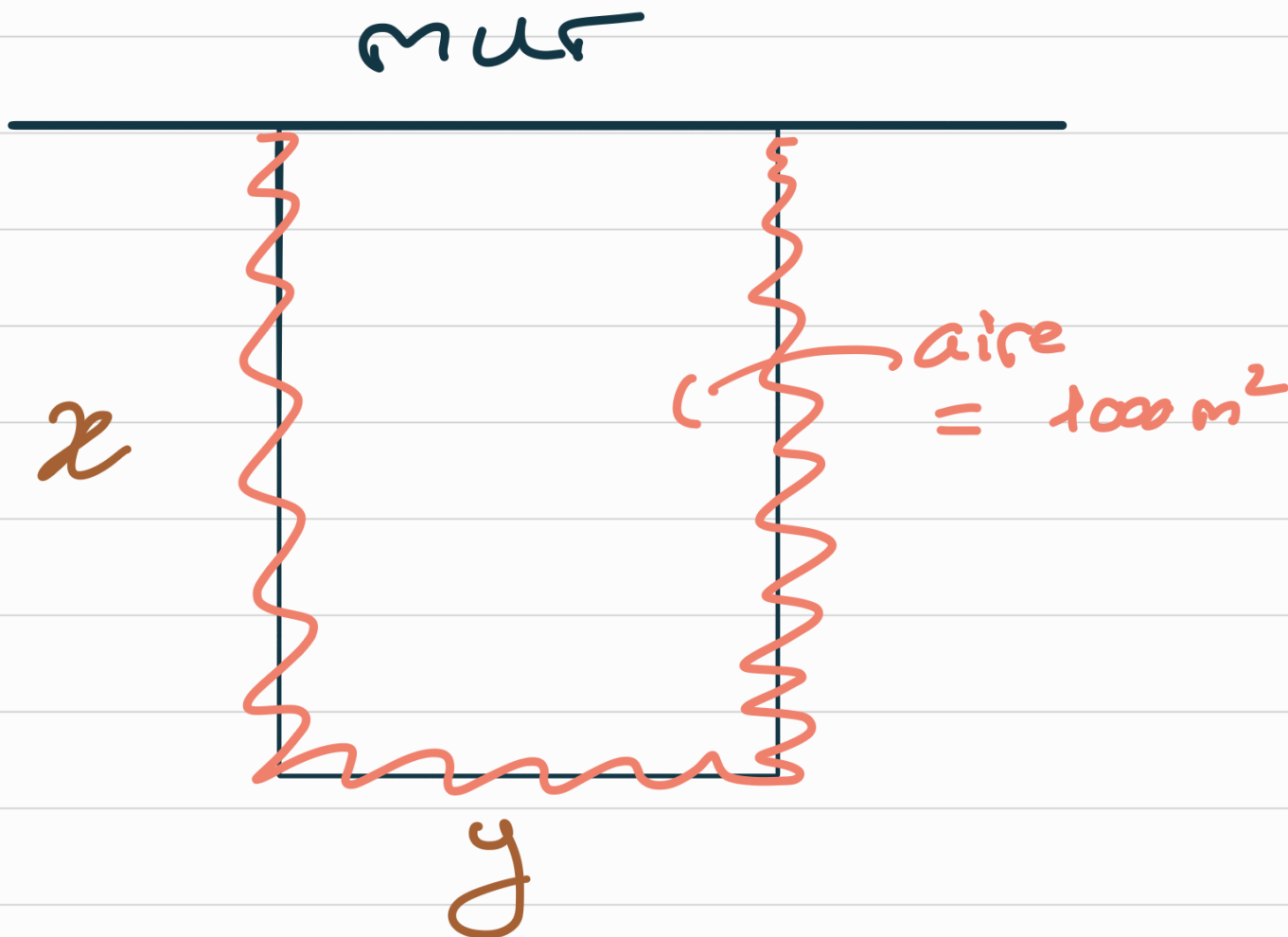
• • • - •

Zu 6. Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen

Ein rechteckiges Gelände soll einen Flächeninhalt von 1000 m^2 haben. An einer Seite soll es durch eine Mauer, an den drei anderen Seiten durch einen Zaun begrenzt werden.

Der Bau von einem Meter Mauer kostet 200€, ein Meter Zaun kostet 50€.

Bestimmen Sie die Seitenlängen des Geländes so, dass die Begrenzung möglichst günstig wird.



$$1 \text{ m mur} = 200 \text{ €}$$

$$1 \text{ m clôture} = 50 \text{ €}$$

① Déterminer y en fonction de x grâce à Pare.

$$Cf = x \times y \Leftrightarrow 1000 = x \times y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1000}{x}$$

$$x \in]0; +\infty[$$

$$y \in]0; +\infty[$$

② Écrire la fonction qui traduit le coût.

$$K = 200y + 2x \times 50 + y \times 50$$

$$K(x) = 200x \frac{1000}{x} + 100x + \frac{1000000}{x}$$

$$= \frac{250\ 000}{x} + 100x$$

③ Résoudre $K'(x) = 0$
 et K'' pour savoir si min ou max.

④ Donne x et y .