

Logarithme

Partie A : Propriétés algébriques

Exercice 1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) ; \ln(8) ; \ln(64) ; \ln(2e^2) ; \ln(64e) ; \ln(\sqrt{32}) ; \ln\left(\frac{2}{e}\right) ; \ln\left(\frac{32}{e}\right)$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) \quad ; \quad B = \ln(\sqrt{5} + 2) - \ln(\sqrt{5} - 2) \quad ; \quad C = \ln(\sqrt{\sqrt{5} + 2}) + \ln(\sqrt{\sqrt{5} - 2})$$

$$\bullet \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\bullet \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\bullet \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

exercice 1:

$$\bullet \Delta_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\Delta_n(2)$$

$$\begin{aligned}\bullet \Delta_n(8) &= \Delta_n(2 \times 4) \\ &= \Delta_n(2 \times 2 \times 2) \\ &= \Delta_n(2^3) \\ &= 3\Delta_n(2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \Delta_n(64) &= \Delta_n(8 \times 8) \\ &= \Delta_n(8^2) \\ &= 2\Delta_n(8) \\ &= 2 \times 3\Delta_n(2) = 6\Delta_n(2).\end{aligned}$$

$$\bullet \ln(2e^2)$$

$$= \ln(2) + \ln(e^2)$$

$$= \ln(2) + 2$$

$$\ln(e^a) = a = e^{\ln(a)}$$

$$\bullet \ln(64e)$$

$$= \ln(64) + \ln(e^1)$$

$$= 6\ln(2) + 1$$

$$\begin{aligned}
 \cdot P_n(\sqrt{32}) &= \frac{1}{2} P_n(32) \\
 &= \frac{1}{2} P_n(2^5) \\
 &= \frac{5}{2} P_n(2).
 \end{aligned}$$

$$\cdot P_n\left(\frac{2}{e}\right) = P_n(2) - 1$$

$$\begin{aligned}
 \cdot P_n\left(\frac{32}{e}\right) &= P_n(32) - 1 \\
 &= 5P_n(2) - 1.
 \end{aligned}$$

Équations et inéquations

8 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln x = 3$

b. $1 - 2e^x = 0$

c. $2 - 3e^x = 11$

d. $(x + 2) \ln x = 0$

$$\bullet \ln(x) = a \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x = e^a$$

$$\bullet e^x = \underbrace{a}_{>0} \Rightarrow x = \ln(a)$$

a) $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

b) $1 - 2e^x = 0$

$$\Leftrightarrow -2e^x = -1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-1}{-2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$c) 2 - 3e^x = 11$$

$$\Leftrightarrow -3e^x = 11 - 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{9}{-3}$$

$$\Leftrightarrow e^x = -3$$

donc pas de solution.

$$d) (x+2) \ln(x) = 0$$

$$x+2=0$$

$$x = -2$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

donc $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$.

9 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln(2x+4) = \ln 2$

b. $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

c. $\ln x (\ln x - 1) = 0$

d. $5 \ln x - x \ln x = 0$

$$\ln(x) = \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

a) $\ln(2x+4) = \ln(2)$

$$\Leftrightarrow 2x+4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2-4$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} = -1.$$

b) $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

$$\Leftrightarrow x + \textcircled{1} = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2x + 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \textcircled{2x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2$$

$$(\Rightarrow) -x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

\ **18** Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de f .

3. Montrer que f est convexe.

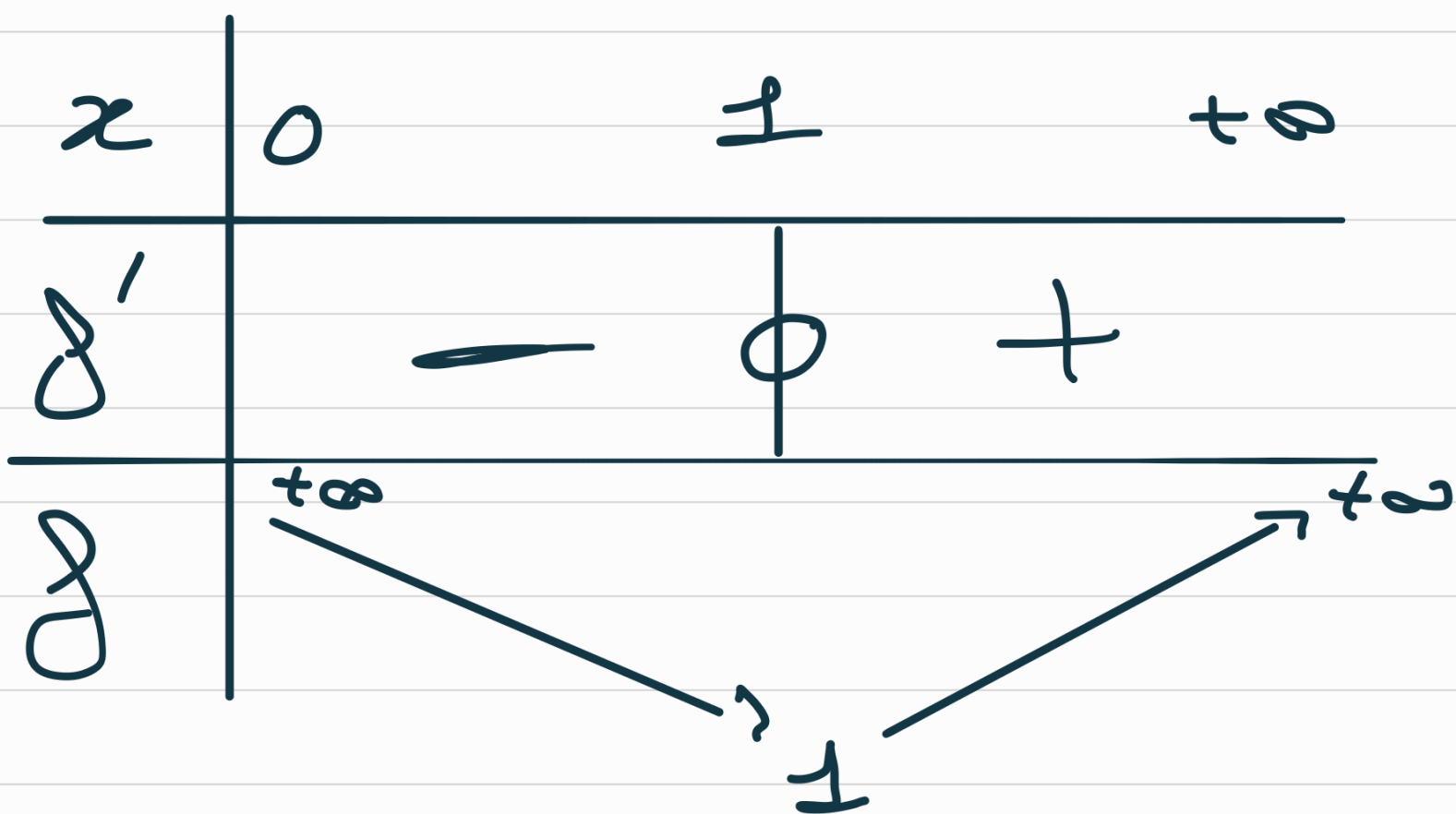
$$x \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$D_n(x)' = \frac{1}{x}$$

$$D_n(u)' = \frac{u'}{u}$$

$$1) f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$2) f'(x) = \frac{x-1}{x > 0}$$



$$3) f''(x) = \frac{x - (x-1)}{x^2}$$

donc $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 1 (Sujet Calédonie 27 oct 2022 - 10 pts) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Déterminer f' .
b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x=e$.
c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$;
en déduire la position relative de la courbe C_f et de la tangente T .
2. a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
b) Déterminer un encadrement de α au dixième.
c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} 1) \quad a) \quad f'(x) &= \ln(x) + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 1 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

$$g = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$b) \quad f'(e) = \ln(e) = 1$$

$$\begin{aligned}
 f(e) &= e^{\Delta_n |e|} - e - 2 \\
 &= e \times 1 - e - 2 \\
 &= \cancel{e} - \cancel{e} - 2 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 T: \gamma &= 1 \times (x - e) - 2 \\
 &= x - e - 2.
 \end{aligned}$$

$$c) f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

donc f est convexe sur $J_0; +\infty[$.

Donc T est au dessus de
la courbe C sur $J_0; +\infty$.