

Structure Algébrique

• Famille TD 1 :

exercice 1 :

a) neutre : 0 inverse : $-x$

b) 0 n'a pas d'inverse.

d) aucun élément n'a d'inverse.

k) $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $*$.

→ Soit (a_1, b_1) , $(a_2, b_2) \in G$

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (\underbrace{a_1 a_2}_{\in G}, \underbrace{b_1 + b_2}_{\in G})$$

$$\in G.$$

→ Seien $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in G$

$$\begin{aligned} & \bullet (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3)) \\ &= (a_1, b_1) * (\underbrace{a_2 a_3}_a, \underbrace{b_2 + b_3}_b) \\ &= (a_1 a_2 a_3, b_1 + b_2 + b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet ((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) \\ &= (a_1 a_2, b_1 + b_2) * (a_3, b_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

→ on pose $e = (1; 0) \in G$

Soit $(a_1, b_1) \in G$

$$\begin{aligned} \bullet (a_1, b_1) * (1, 0) &= (a_1 \times 1, b_1 + 0) \\ &= (a_1, b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (1, 0) * (a_1, b_1) &= (1 \times a_1, 0 + b_1) \\ &= (a_1, b_1). \end{aligned}$$

donc $(1, 0)$ est l'élément neutre de G .

→ Soit $(a, b) \in G$

$$\text{on pose } (a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -b \right) \in G$$

$$\begin{aligned} \cdot (a, b) * (a, b)^{-1} &= \left(a \times \frac{1}{a} ; b + (-b) \right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot (a, b)^{-1} * (a, b) &= \left(\frac{1}{a} \times a , -b + b \right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

donc $\forall (a, b) \in G$, $(a, b)^{-1}$ est l'
élément inverse.

Donc $(G, *)$ est un groupe.

exercice 2:

$$a) (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

$$(H, *) \leq (G, *)$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H.$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*, \quad 1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\bullet \text{ Soit } x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$x * y^{-1} = x * \frac{1}{y} > 0$$

$$\text{donc } x * y^{-1} \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Donc } (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

$$\hookrightarrow 3\mathbb{Z}' = \{3n : n \in \mathbb{Z}'\}$$

$$(\mathbb{Z}', +) \leq (\mathbb{Z}, +).$$

- $3\mathbb{Z}' \subset \mathbb{Z}$ et $0 \in 3\mathbb{Z}'$

- Soit $k, p \in 3\mathbb{Z}'$

$$k + p^{-1} = k - p$$

$$= 3n - 3n'$$

$$= 3 \underbrace{(n - n')}_{\in \mathbb{Z}'}$$

$$\in 3\mathbb{Z}'$$

donc $(3\mathbb{Z}', +)$ sous-groupe
de $(\mathbb{Z}', +)$.

exercice 3 :

a) $\langle 2 \rangle \leq (\mathbb{R}^*, \times)$

↳ sous-groupe engendré par 2

$$\langle g \rangle = \langle e, g, \underbrace{g^2}_{g * g}, \underbrace{g^3}_{g * g * g}, \dots \rangle$$

$$\langle 2 \rangle = \left\{ 1, 2, 2 \times 2, 2 \times 2 \times 2, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \times 2}, \dots \right\}$$

b) $\langle -1 \rangle = \{ 1, -1 \}$

↳ $o(\langle -1 \rangle) = 2$

exercice 4 :

$$e) \quad \Phi_1 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$$
$$n \longmapsto 4n$$

Soit $n, m \in (\mathbb{Z}, +)$

$$\Phi_1(n+m) = 4(n+m)$$

$$= 4n + 4m$$

$$= \Phi_1(n) + \Phi_1(m)$$

donc Φ_1 est un morphisme de groupes.

$$\bullet \text{Ker}(\phi_1) = \{ n \in \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{départ}} : \phi_1(n) = \underbrace{0}_{\text{arrivée}} \}$$

$$\phi_1(n) = 4n = 0 \Leftrightarrow n = 0$$

donc $\text{Ker}(\phi_1) = \{ \underbrace{0}_{\text{départ}} \}$ et ϕ_1 est injective.

$$\bullet \text{Im}(\phi_1) = \{ 4n : n \in \mathbb{Z} \} \\ = 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

$$\bullet (\phi_1 \circ \phi_1)(n) \\ = \phi_1(\phi_1(n)) = \phi_1(4n) \\ = 4 \times 4n = 16n.$$

exercice 5:

a) $\phi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \times)$

$$n \longmapsto x^n$$

Soit $n, m \in (\mathbb{Z}, +)$

$$\phi(n+m) = x^{n+m}$$

$$= \underbrace{x^n}_{\downarrow} \times \underbrace{x^m}_{\downarrow}$$

$$= \phi(n) \times \phi(m)$$

donc ϕ est un morphisme de groupe.

$$3) (\mathbb{Z}^2, +) = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}^2, +) : (m, n) + (m', n') \\ = (m + m', n + n') \end{aligned}$$