

TD 3

• f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f est continue en (a, b) si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

↳ on n'utilise jamais en $(0,0)$

méthode: quand on veut étudier la continuité en $(0,0)$.

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \sin(\theta).$$

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$$

exercice 1:

$$1) f(x, y) = \frac{x^{1/2} y^{3/2}}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{(r \cos \theta)^{1/2} (r \sin \theta)^{3/2}}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{r^{1/2} \cos^{1/2} \theta \cdot r^{3/2} \sin^{3/2} \theta}{r^2}$$

$$= \cos^{1/2} \theta \sin^{3/2} \theta \quad \times$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/2} \times 0}{x^2 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} f(y, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{1/2} y^{3/2}}{y^2 + y^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{y^2}}{2\cancel{y^2}} = \frac{1}{2}.$$

on obtient deux limites
différentes : $0 \neq \frac{1}{2}$.

Donc f n'est pas continue
en $(0,0)$.

or f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
comme une fraction de deux
fonctions continues dont le dénominateur
ne s'annule pas.

$$2) \quad g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= \frac{(r \cos \theta)^2 \times (r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{r^4 \times \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2}$$

$$= r^2 \underbrace{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}_{\cos^2 \leq 1 \text{ et } \sin^2 \leq 1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = ?$$

$$0 \leq g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \leq r^2 \times 1 \times 1$$

d'où $0 \leq g(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq r^2$

$$\xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

donc $\lim_{r \rightarrow 0} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$
 $= g(0, 0)$

Donc g est continue en $(0, 0)$.

exercice 2:

1) $f(x, y) = x^2 e^{xy}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$
 $= e^{xy} (2x + x^2 y)$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 e^{xy}$$

$$2) f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0\}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}$$

$\mathcal{C}^1$ en a : dérivable en a



dérivée continue
en a

$\hookrightarrow$ 1 variable

$\mathcal{C}^1$ en (a,b) : dérivées partielles
existent en (a,b)



dérivées partielles
sont continues en
 $(a;b)$.

$\hookrightarrow$ 2 variables

exercice 4 :

2) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\textcircled{a+h}, b) - f(a,b)}{h} \quad \text{1 coordonnée} \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, \textcircled{b+h}) - f(a,b)}{h} \quad \text{2 coordonnée} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\textcircled{0+h}, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \times 0}{h^2 + 0^2} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$