

Chapitre 3

Zu 1. Exponentielles Wachstum oder exponentielle Abnahme erkennen

Entscheiden Sie, ob die Funktionswerte von f mit wachsendem x zu- oder abnehmen.

a) $f(x) = 0,2 \cdot 5^x$

b) $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

a) $f(x) = 0,2 \times 5^x$
 > 1

L, croissance exponentielle

b) $f(x) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 < 1

L, décroissance exponentielle.

Zu 2. Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion bestimmen

Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f .

a) P(0|2) und Q(3|54)

b) P(0|0,5) und Q(5|3888)

c) P(0|4) und Q(-4|2500)

a) $f(x) = c \cdot a^x$ puissance de x

P(0|2) et Q(3|54)

$$\bullet f(0) = 2 \Leftrightarrow c \times a^0 = 2$$

$$\Leftrightarrow c \times 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

donc $f(x) = 2 \times a^x$

$$\bullet f(3) = 54 \Leftrightarrow 2 \times a^3 = 54$$

$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{54}{2} = 27$$

$$\Rightarrow a = 3$$

also $f(x) = 2 \times 3^x$

Zu 3. Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen

Lösen Sie die Exponentialgleichung $a^x = b$. Geben Sie die Lösung in der Form $x = \log_a(b)$ an und notieren Sie für x den Wert.

- a) $3^x = 81$ b) $5^x = 125$ c) $4^x = \frac{1}{16}$ d) $17^x = 1$ e) $0,6^x = \frac{10}{6}$ f) $8 \cdot 2^x = 128$

a) $3^x = 81 \Rightarrow x = \log_3(81)$
 $= 4$

$\hookrightarrow 81 = 9 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

b) $5^x = 125 \Rightarrow x = \log_5(125)$
 $= 3$

$$\rightarrow 125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$c) 4^x = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \log_4 \left(\frac{1}{16} \right) = -2$$

$\frac{1}{16}$
 4×4

Zu 4. Natürliche Exponentialfunktion ableiten

Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion f' von f .

a) $f(x) = 5 \cdot e^x$

b) $f(x) = 7 \cdot e^x + 2x$

c) $f(x) = -3 \left(\frac{1}{9} e^x - 2x^3 \right)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$

$$(e^x)' = e^x$$

$$a) f'(x) = 5 \cdot e^x$$

$$b) f'(x) = 7 \cdot e^x + 2$$

Zu 5. Exponentialgleichung mit dem natürlichen Logarithmus lösen

Lösen Sie die Gleichung. Notieren Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus und geben Sie einen auf zwei Nachkommastellen gerundeten Näherungswert für die Lösung an.

a) $e^x = 1$

b) $e^x = 15$

c) $-3e^x = -9$

d) $4e^x = 1$

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

a) $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$

b) $e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln(15) \approx 2,71$

c) $-3e^x = -9$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln(3) \approx 1,10.$$

Zu 6. Transformierte Exponentialfunktionen untersuchen

Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion f' sowie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion F von f .

a) $f(x) = 2 \cdot e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x+2} + 1$

c) $f(x) = e^{3x+5} + x^2$

a) $f(x) = 2 \cdot e^{5x} \rightarrow (e^u)' = u' e^u$

$$f'(x) = 2 \cdot 5 e^{5x} = 10 e^{5x}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{5x} = \frac{2}{5} e^{5x}$$

Zu 7. Vorgänge mit dem Modell des begrenzten Wachstums untersuchen

Das beschränkte Wachstum einer Pflanze wird beschrieben durch eine Funktion h mit $h(t) = 200 - 5 \cdot e^{-0,02t}$. Dabei ist t die Zeit in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $h(t)$ die Höhe der Pflanze in cm.

a) Geben Sie die Schranke S und die Höhe der Pflanze zu Beobachtungsbeginn an.

b) Berechnen Sie die Höhe der Pflanze 5 Tage nach und 2 Wochen vor Beobachtungsbeginn.

c) Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt, an dem die Pflanze um 0,04 cm pro Tag wächst.

a) $h(0) = 200 - 5 \cdot e^{-0,02 \cdot 0}$

$$= 200 - 5 \cdot e^0$$

$$= 200 - 5 \cdot 1 = 195.$$

donc la hauteur au début de l'observation est de 195 cm.

$$x \rightarrow -\infty, e^x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty, e^x \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow +\infty, h(t) \rightarrow ?$$

$$S = 200$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow h(t) &= 200 - \underbrace{S \cdot e^{-0,02t}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ S \times 0 = 0}} \\ &= 200 - 0 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } h(S) &= 200 - S \cdot e^{-0,02 \times S} \\ &\approx 195 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(-14) &= 200 - S \cdot e^{-0,02 \cdot -14} \\ &= 190 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{c) } h'(t) = -5x - 0,02 e^{-0,02t} \\ = 0,1 - e^{-0,02t}$$

$$h'(t) = 0,04 \Leftrightarrow 0,1 - e^{-0,02t} = 0,04$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{0,04}{0,1}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,02t} = 0,4$$

$$\Leftrightarrow -0,02t = \ln(0,4)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,4)}{-0,02}$$

$$\Leftrightarrow t \simeq 46 \text{ jours.}$$