

Suites

① Introduction

- formule explicite:

$$L, u_n = n^2 + 2n$$

↳ terme $\hookrightarrow$ image

↳ rang $\hookrightarrow$ antécédent

- formule récurrente:

$$L, u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

Exercise 1

Calculer les 4 premiers termes des suites définies de la façon suivante :

1. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n = n^2 + 2n$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, $v_n = 100 \times 1,02^n$

3. $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 0$, $w_{n+1} = 3w_n - 4$

4. $x_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geq 0$, $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + 1$

1) $u_0 = 0^2 + 2 \times 0 = 0$

$$u_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

$$u_2 = 2^2 + 2 \times 2 = 8$$

$$u_3 = 3^2 + 2 \times 3 = 15$$

3) $w_0 = 2$

$$w_1 = 3w_0 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2$$

$$w_2 = 3w_1 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2$$

$$w_3 = 3w_2 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2.$$

② Sens de variations

• méthode : différence.

↳ calcule $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ u_{n+1} - u_n > 0 & u_{n+1} - u_n < 0 \end{array}$$



(u_n) croissante



(u_n) décroissante.

• méthode : quotient

↳ calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$



(u_n) croissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$



(u_n) décroissante

• méthode : fonction



cette méthode marche que par des formules explicites.

$$u_n = f(n)$$

⇒ on étudie les variations de f sur $[0; +\infty[$ et (u_n) aura

les mêmes variations que f.

Exercice 3 *

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. Pour tout entier naturel n , $u_n = 0,2n^2 + n - 3$
2. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3}{n+1}$
3. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$
4. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$
5. $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + n^2$

1) $u_{n+1} - u_n$

$$= [0,2(n+1)^2 + (n+1) - 3] \\ - [0,2n^2 + n - 3]$$

$$= 0,2(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 3 \\ - 0,2n^2 - n + 3$$

$$= \cancel{0,2n^2} + 0,4n + \cancel{0,2} + \cancel{n} + \cancel{1-3} - \cancel{0,2n^2} - \cancel{n} + \cancel{3}$$

$$= 0,4n + 1,2 > 0$$

donc (u_n) est croissante.

2) $u_{n+1} - u_n$

$$= \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1}$$

$$= \frac{3(n+1) - 3(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{3n} + 3 - \cancel{3n} - 6}{(n+2)(n+1)} = \frac{-3}{(n+2)(n+1)}$$

$$< 0$$

donc (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} 4) & u_{n+1} - u_n \\ &= \cancel{u_n} - 2n - 5 - \cancel{u_n} \\ &= -2n - 5 \\ &< 0 \end{aligned}$$

donc (u_n) est décroissante.

③ Suites arithmétiques

$$\bullet u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\hookrightarrow$ la raison

$$\bullet u_n = u_0 + n \times r, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= u_1 + (n-1) \times r, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$= u_p + (n-p) \times r$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} r > 0 \\ r < 0 \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ croissante}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ décroissante}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ constante}$$

$$\bullet S = u_0 + \dots + u_n$$

$$= \underset{\substack{\text{nb. de} \\ \text{terme}}}{(n+1)} \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow S = u_1 + \dots + u_n$$

$$= n \times \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

$$\hookrightarrow S = u_p + \dots + u_n$$

$$= (n - p + 1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$$

④. Suites géométriques

- $u_{n+1} = u_n \times \underbrace{q}_{\text{raison}}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $u_n = u_0 \times q^n, \forall n \in \mathbb{N}$
 $= u_1 \times q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
 $= u_p \times q^{n-p}$
- $\begin{cases} u_0 > 0, 0 < q < 1 \Rightarrow (u_n) \searrow \\ u_0 > 0, q > 1 \Rightarrow (u_n) \nearrow \end{cases}$
- $\begin{cases} u_0 < 0, 0 < q < 1 \Rightarrow (u_n) \nearrow \\ u_0 < 0, q > 1 \Rightarrow (u_n) \searrow \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 S &= u_0 + \dots + u_n \\
 &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= u_1 + \dots + u_n \\
 &= u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= u_p + \dots + u_n \\
 &= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}
 \end{aligned}$$