

Chapitre 4

Zu 1. Sinus- und Kosinusfunktion ableiten

Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f' sowie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion F .

a) $f(x) = \cos(x) + 4$

b) $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 6x^2$

c) $f(x) = -4 \cdot \cos(x) - \sin(x)$

$$(\cos x)' = -\sin(x)$$

$$(\sin x)' = \cos(x)$$

$$\cos x \xrightarrow{\text{primitive}} \sin x$$

$$\sin x \xrightarrow{\text{primitive}} -\cos x$$

a) $f(x) = \cos(x) + 4$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$F(x) = \sin(x) + 4x$$

$$ج) f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 6x^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + 12x$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2 \cdot \cos(x) + \frac{6x^3}{3} \\ &= -2 \cdot \cos(x) + 2x^3. \end{aligned}$$

Zu 2. Funktionen verketteten

Gegeben sind die Funktion u , v und w mit $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = 3x + 1$ und $w(x) = e^{5x}$.
Bilden Sie die Verkettungen $f(x) = u(v(x))$, $g(x) = v(u(x))$ und $h(x) = w(v(x))$.

$$\cdot f(x) = u(v(x))$$

$$= u(3x + 1)$$

$$= \sqrt{3x + 1}$$

$$\cdot g(x) = v(u(x))$$

$$= v(\sqrt{x})$$

$$= 3\sqrt{x} + 1$$

Zu 3. Produktregel anwenden

Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f' .

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sin(x) \cdot \frac{4}{x}$

d) $f(x) = (4x + 1) \cdot \frac{1}{x}$

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (-\sin(x)) \\ &= 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \sqrt{x}$

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sqrt{x} + e^{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Zu 4. Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^4 + 4x^2) \cdot e^{2x}$.

- Untersuchen Sie, ob der Graph von f symmetrisch zur y -Achse oder zum Koordinatenursprung ist.
- Bestimmen Sie die Nullstellen von f .
- Weisen Sie nach, dass $x = 0$ eine Minimumstelle von f ist.
- Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.
- Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = 0,25 \cdot e^{2x} \cdot (2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 14x + 7)$ eine Stammfunktion von f ist.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse im Intervall $[0; 1]$ einschließt.

$$\text{a) } f(-x) = (x^4 + 4x^2) \cdot e^{-2x} \\ \neq f(x) \text{ et } \neq -f(x)$$

donc f n'est ni symétrique
par rapport à l'axe des ordonnées
ni par rapport à l'origine.

$$\text{b) } f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^4 + 4x^2) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 = 0$$

ou

$$x^2 + 4 = 0$$

↓

$$x = 0$$

↓

$$x^2 = -4 \quad \times$$

donc le seul zéro est $x = 0$.

c) $f(x) = (x^4 + 4x^2) e^{2x}$

$$f'(x) = (4x^3 + 8x) \cdot e^{2x} + (x^4 + 4x^2) \cdot 2e^{2x}.$$

$$f'(0) = (4 \times 0^3 + 8 \times 0) \cdot e^{2 \cdot 0} + (0^4 + 4 \cdot 0^2) \cdot 2e^{2 \cdot 0} = 0$$

$$f'(x) = (4x^3 + 8x) \cdot e^{2x} + (x^4 + 4x^2) \cdot 2e^{2x}.$$

$$= e^{2x} \left(4x^3 + 8x + (x^4 + 4x^2) \cdot 2 \right)$$

$$= e^{2x} (4x^3 + 8x + 2x^4 + 8x^2)$$

$$f''(x) = 2e^{2x} (2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x) + e^{2x} (12x^3 + 8 + 8x^2 + 16x)$$

$$f''(0) = 2e^{2 \cdot 0} (2 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0) + e^{2 \cdot 0} (12 \cdot 0^3 + 8 + 8 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0)$$

1×8

donc $f''(0) = 2 > 0$.

Donc $x = 0$ est un minimum.

$$d) f(x) = \underbrace{(x^4 + 4x^2)}_{+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty}$$

• $x \rightarrow +\infty$ ist $f(x) \rightarrow +\infty$

• $x \rightarrow -\infty$ ist $f(x) \rightarrow 0$

$$e) F(x) = 0,25 \cdot e^{2x} \cdot (2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 14x + 7)$$

$$F'(x) = 0,5 \cdot e^{2x} (2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 14x + 7) + 0,25e^{2x} \cdot (8x^3 - 12x^2 + 28x - 14)$$

$$= e^{2x} \cdot (x^4 - \cancel{2x^3} + 7x^2 - \cancel{7x} + \cancel{3,5} + \cancel{2x^3} - 3x^2 + \cancel{7x} - \cancel{3,5})$$

$$= e^{2x} (x^4 + 4x^2)$$

$$= f(x).$$

$$g) \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \left[0,25 \cdot e^{2x} \cdot (2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 14x + 7) \right]_0^1$$

$$= (0,25 e^2 (2 - 4 + \cancel{14} - \cancel{14} + 7)) - (0,25 \cdot e^0 \cdot 7)$$

$$= 0,25 e^2 \cdot S = 0,25 \cdot 1,7$$

$$= 1,25 \cdot e^2 = 1,75.$$

$$\approx 7,49$$