

Primitives

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \frac{1}{x^3} \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^7} \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{x^3} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_1(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$$

$$x^n \xrightarrow{\text{primitive}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$F_1(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$$

$$+ \frac{x^2}{2} - x$$
$$k \xrightarrow{\text{primitive}} kx$$

$$\cdot \int_2 (x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{primitive}} \ln(x)$$

$$\frac{1}{x^n}, n \geq 2 \xrightarrow{\text{primitive}} -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$F_2(x) = 3\ln(x) - 2x - \frac{1}{1} \times \frac{1}{x}$$

$$= 3\ln(x) + \frac{2}{x}$$

$$\bullet f_3(x) = 7x^6 + 8e^{4x+2} - \frac{1}{x^3}$$

$$F_3(x) = 7 \times \frac{x^7}{7} + 8 \times \frac{1}{4} \times e^{4x+2} - \frac{-1}{2} \times \frac{1}{x^2}$$

$$e^x \xrightarrow{\text{primitive}} e^x$$

$$u' e^u \xrightarrow{\text{primitive}} e^u$$

$$\hookrightarrow e^u \xrightarrow{\text{primitive}} \frac{e^u}{u'}$$

$$F_3(x) = x^7 + 2e^{4x+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$$

$$\cdot f_4(x) = 4x^4 + 3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^{-1}}{-1} + \frac{4}{-2}x^{-2} \\ &= \frac{4}{5}x^5 + x^3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\cdot f_5(x) = 3e^{5x+2}$$

$$\begin{aligned} F_5(x) &= 3x \frac{1}{5} e^{5x+2} \\ &= \frac{3}{5} e^{5x+2} \end{aligned}$$

$$\cdot f_6(x) = e^{3x} + x^5 - \frac{1}{x}$$

$$F_6(x) = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{x^5}{5} - \ln(x)$$

$$\cdot f_7(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4}$$

$$F_7(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} - 5x - \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{x^2}$$

$$\cdot f_8(x) = \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{x^3}$$

$$= \frac{2x^5}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}$$

$$= 2x^2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3},$$

$$F_8(x) = \frac{2x^3}{3} + 3\ln(x) + -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3\ln(x) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}.$$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivantes, déterminer l'unique primitive de la fonction donnée vérifiant la condition indiquée.

$$f_1 : x \mapsto 2x + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_1(3) = 2$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[\text{ avec } F_2(1) = 3$$

$$f_3 : x \mapsto 2e^{3x-4} + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_3\left(\frac{4}{3}\right) = 5$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3}{x} + x \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ avec } F_4(-1) = 2$$

$$\cdot f_1(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{2x^2}{2} + x + C \\ &= x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$F_1(3) = 2$$

$$3^2 + 3 + C = 2$$

$$12 + C = 2$$

$$C = 2 - 12 = -10$$

donc $F_1(x) = x^2 + x - 10$

• $f_2(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= 2 \ln(x) + \frac{-1}{1} \times \frac{1}{x} + C \\ &= 2 \ln(x) - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$F_2(1) = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(1) - \frac{1}{1} + C = 3$$

$$\Leftrightarrow 0 - 1 + C = 3$$

$$\Leftrightarrow C = 3 + 1 = 4$$

done $F_2(x) = 2A(x) - \frac{1}{x} + 4$

• $f_3(x) = 2e^{3x-4} + 1$

$$F_3(x) = 2 \times \frac{1}{3} e^{3x-4} + x + C$$

$$= \frac{2}{3} e^{3x-4} + x + C$$

$$F_3\left(\frac{4}{3}\right) = 5$$

$$\frac{2}{3} e^{\cancel{3} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} - 4} + \frac{4}{3} + C = 5$$

$$\frac{2}{3}x + 1 + \frac{2}{3} + C = 5$$

$$\frac{6}{3} + C = 5$$

$$2 + C = 5 \Rightarrow C = 5 - 2 = 3$$

donc
$$F_3(x) = \frac{2}{3}e^{3x-4} + x + 3$$

$$\bullet f_4(x) = \frac{3}{x} + x$$

$$F_4(x) = 3\ln(x) + \frac{x^2}{2} + C$$

$$F_4(1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 3h(1) + \frac{1^2}{2} + C = 2$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{1}{2} + C = 2$$

$$\Leftrightarrow C = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$